



Bellavista, 28 de abril, 2022

Señor(a):

RESOLUCIÓN CONSEJO DE FACULTAD N° 045-2022-CF-FCNM. - Bellavista, 28 de abril 2022.- EL CONSEJO DE FACULTAD DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

Visto, el acuerdo de Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, Adoptado en su sesión extraordinaria realizada de forma virtual vía reunión Google Meet, el 28 de abril 2022, en relación al informe final del proyecto de investigación presentado en la Unidad de Investigación por el docente Dr. SOTELO PEJERREY ALFREDO.

CONSIDERANDO:

Que, en el Art. 48° de la Ley Universitaria No 30220, establece que la investigación constituye una función esencial y obligatoria de la universidad, que la fomenta y realiza, respondiendo a través de la producción de conocimiento y desarrollando de tecnologías a las necesidades de la sociedad, con especial énfasis en la realidad nacional. Lo docentes, estudiantes y graduados participan en la actividad investigadora en su propia institución o en redes de investigación nacional o internacional, creadas por las instituciones universitarias públicas o privadas.

Que, según lo estipulado en el Artículo 14°, numeral 14.2 del Estatuto vigente de la Universidad Nacional del Callao, establece que una de las funciones de la Universidad Nacional del Callao, está considerada la investigación, entendida como la búsqueda permanente de la verdad y, la misma es una labor prioritaria y de fundamental importancia que todo docente debe desempeñar, en concordancia con el Artículo 256° y el Artículo 289°, numeral 289.9 del precitado Normativo;

Que, mediante Resolución N° 082-019-CU del 07 de marzo del año 2019, se aprueba el Reglamento de Participación de Docentes en Proyectos Investigación, así como la Directiva N° 013-2018-R – Protocolos de Proyecto en Informe Final de Investigación de Pregrado – Posgrado, Docentes, Equipos, Centros e Institutos de Investigación;

Que, con Oficio N° 16-2022-UI-FCNM recibido el 12 de abril 2022, el Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática remite la Resolución N° 05-2022-D-UI-FCNM adjuntando el Proyecto de Investigación titulado: "**TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT**", presentado por el profesor Auxiliar, Tiempo completo, Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey para su trámite correspondiente;

Que, estando vigente el Estado de Emergencia Nacional por las graves circunstancias que afectan la vida de la Nación a consecuencia del brote del COVID-19. Se ha emitido la Resolución de Consejo Universitario N° 068-2020-CU, de fecha 25 de marzo del año 2020, mediante la cual se resuelve "autorizar con eficacia anticipada, del 16 de marzo del año 2020, y hasta que concluya el estado de emergencia nacional, la modificación del lugar de la prestación de servicios docentes y administrativos para no afectar el pago de remuneraciones";

Estando lo glosado; a lo acordado por el Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática en su sesión Extraordinaria de fecha 28 de abril del año 2022, vía reunión Meet y, en uso de las atribuciones que le confiere los Artículo 180°, inciso 180.14 del Estatuto de la Universidad y, el Artículo 70° de la Ley Universitaria, Ley N° 30220;

RESUELVE:

- 1°. **APROBAR**, el Informe Final de Investigación titulado "TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT", ejecutado por el profesor Auxiliar tiempo completo Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey, desde el 01 de mayo 2021 al 30 de abril 2022, quien contó con el apoyo de la Servidora Administrativa, Sra. Patricia del Carmen Girón Hidalgo, Código 3078.
- 2°. **ELEVAR**, la presente Resolución y el expediente respectivo al Vicerrectorado de Investigación, para su conformidad concordante con el reglamento correspondiente.
- 3°. **TRANSCRIBIR** la presente Resolución al Vicerrectorado de Investigación, Unidad de Investigación, Escuela Profesional y Departamento académico e interesado y fines consiguientes.

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**. -Secretario Académico

Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA



Mg. Gustavo Alberto Altamiza Chávez
Secretario Académico



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
DECANATO



PROVEÍDO N°211-2022-D-FCNM

Ref. : OFICIO N°16-2022-UI-FCNM
Informe Final de Investigación Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey.

PASE, el documento de la referencia, a la **Oficina de Secretaría Académica**, para que se sirva programarlo en el próximo Consejo de Facultad.

Bellavista, 16 de abril de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA



Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
📁 Archivo



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACION**



“Año del Fortalecimiento de la Soberanía Nacional”

Bellavista, 12 de abril, 2022

OFICIO N° 16-2022-UI-FCNM

Señor Doctor

JUAN A. MÉNDEZ VELÁSQUEZ

Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Presente. -

Asunto: Informe Final del Doctor SOTELO PEJERREY, ALFREDO.

De mi consideración:

Tengo a bien dirigirme a usted para saludarlo y a la vez remitir a su despacho, para el trámite correspondiente, la Resolución digitalizada por el Director de la Unidad de Investigación N° **05-2022-D-UI-FCNM** que Aprueba el Informe Final de Investigación titulado: “**TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT**” presentado por el Profesor, Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey.

Asimismo, se adjunta la siguiente documentación:

- 1) Solicitud digitalizada de aprobación de Informe Final de Investigación.
- 2) Archivo digitalizado del Informe Final de Investigación -
- 3) Archivo digitalizado del Artículo Científico en PDF.
- 4) Informe de URKUND del Informe Final de Investigación
- 5) Comprobante de pago por concepto de URKUND
- 6) Ficha de CTI VITAE.
- 7) Declaración Jurada.
- 8) Ficha de evaluación Informe Final de Investigación

Sin otro particular, quedo de usted,

Atentamente,
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA



Dr. WHUALKUER LOZANO BARTRA
Director

c.c.: Archivo

Adj.: Resolución Directoral N° 05-2022-D-UI-FCNM

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
UNIDAD DE INVESTIGACION

RESOLUCIÓN DIRECTORAL DE LA UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO N° 05-2022-D-UI-FCNM

Bellavista, 12 de abril, 2022.

EL DIRECTOR DE LA UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO.

Visto el Informe Final de Investigación titulado “**TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT**” presentado por el profesor Auxiliar tiempo completo Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey;

CONSIDERANDO:

Que, por Resolución Rectoral N° 305-2021-R, fue aprobado del 01 de mayo 2021 al 30 de abril 2022 el cronograma de ejecución del Proyecto de Investigación “**TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT**” presentado por el profesor Auxiliar tiempo completo Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey;

Que, el citado profesor ha elaborado su Informe Final en concordancia con el Reglamento de la Participación de los Docentes de la Universidad Nacional del Callao en Proyectos de Investigación, aprobado por Resolución de Consejo Universitario N° 082-2019-CU, su modificatoria Resolución de Consejo Universitario N° 101-2021-CU y la Directiva N° 013-2018-R – Protocolos del Proyecto e Informe Final de Investigación de Pregrado, Posgrado y/o docentes, equipos, centros e institutos de investigación de la Universidad Nacional del Callao, presentando el referido informe en archivo virtual, requisito indispensable para la presentación de un nuevo Proyecto;

En uso de las atribuciones que le concede el Artículo 64° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao;

RESUELVE:

- 1° **Aprobar** el Informe Final de Investigación titulado “**TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT**”, ejecutado por el profesor Auxiliar tiempo completo Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey, desde el 01 de mayo 2021 al 30 de abril 2022, quien contó con el apoyo de la Servidora Administrativa, Sra. Patricia del Carmen Girón Hidalgo, Código 3078;
- 2° Elevar la presente Resolución al Señor Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, para los trámites consiguientes.

Regístrese, comuníquese y archívese.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA



Dr. WHUALKUER LOZANO BARTRA
Director

FORMATO N° 09
SOLICITUD DE APROBACIÓN DE INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

Bellavista, 02 de abril del 2022

Señor(a) (ita)

Mg. LOZANO BARTRA WHUALKUER ENRIQUE
Director de la Unidad de Investigación
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Universidad Nacional del Callao.

Yo, Alfredo Sotelo Pejerrey, docente adscrito a la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, categoría AUXILIAR DE TC TP con domicilio en Pasaje Q, N° 345, Urb. Carlos Cueto Fernandini-Los Olivos, identificado con código N° 5438, DNI N° 45569296 y e-mail asotelop@unac.edu.pe, en calidad de docente responsable colaborador presento y solicito la aprobación del **INFORME FINAL** del proyecto de investigación **“TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT”** aprobado mediante resolución rectoral N° 305-2021-R.

Por lo indicado, adjunto a la presente y en folder, los documentos indicados en el “Reglamento de la participación de los docentes de la Universidad Nacional del Callao en Proyectos de Investigación”, para su evaluación y dictamen por el Comité Directivo de la Unidad de Investigación que usted dirige.

Atentamente,

Alfredo Sotelo Pejerrey
Docente responsable

c.c. File

(*) Indicar si es docente responsable o colaborador.

Nota.- (1) La presente solicitud la redactan y presentan de manera independiente el docente responsable y el docente colaborador. Ambas se presentan en el mismo expediente.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



**INFORME FINAL DE PROYECTO DE
INVESTIGACIÓN**
**“ TRAZAS DE OPERADORES EN
ESPACIOS DE HILBERT ”**
AUTOR: ALFREDO SOTELO PEJERREY
**PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de mayo del 2021 al 30 de abril del
2022**
RESOLUCIÓN DE APROBACIÓN N° 305-2021-R
CALLAO, 2022

A handwritten signature in blue ink, located in the bottom right corner of the page.

A handwritten signature in blue ink, located in the bottom right corner of the page. The signature is stylized and appears to consist of several overlapping loops and lines, possibly representing the initials 'A.W.' or a similar set of initials.

DEDICATORIA

Este trabajo de investigación esta dedicado a mi esposa Gaby y a mis padres Alfredo y Flor.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, quiero agradecer a la Universidad Nacional del Callao por la subvención para desarrollar este trabajo de investigación. Mi alma mater siempre la llevaré en mi corazón.

En segundo lugar, quiero agradecer a mis padres y esposa. Ellos son la motivación para continuar trabajando en esta hermosa ciencia que es la matemática.

INDICE

TABLAS DE CONTENIDO	7
RESUMEN	8
ABSTRACT	9
INTRODUCCIÓN	10
CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11
1.1 Descripción de la realidad problemática	11
1.2 Formulación del problema.	12
1.3 Objetivos	12
1.3.1 Objetivos generales.....	12
1.3.2 Objetivos específicos.....	12
1.4 Limitantes de la Investigación.....	13
CAPITULO II. MARCO TEÓRICO	14
2.1 Antecedentes.....	14
2.2 Marco	15
Teórico.....	15
Conceptual	63
2.3 Definición de términos básicos	64
CAPITULO III. HIPÓTESIS Y VARIABLES	67
3.1 Hipótesis.	67
3.2 Definición conceptual de las variables.	67
3.3 Operacionalización de la variable.	68
CAPITULO IV. DISEÑO METODOLÓGICO	69
4.1 Tipo y diseño de la investigación.	69
4.2 Método de investigación.....	69
4.3 Población y muestra.	69
4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado.....	69
4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de información.	70
4.6 Análisis y procesamiento de datos.	70
CAPITULO V. RESULTADOS	72

5.1 Resultados descriptivos	72
5.2 Resultados inferenciales	77
5.3 Otro tipo de resultado estadístico, de acuerdo a la naturaleza del problema	78
CAPITULO VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	79
6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados	79
6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares	80
6.3 Responsabilidad ética.....	80
CONCLUSIONES	81
RECOMENDACIONES	83
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84
ANEXOS	87

TABLAS DE CONTENIDO

Índice de figuras

Ninguna

RESUMEN

“TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT”

Alfredo Sotelo Pejerrey

La presente investigación estudia diversos funcionales sobre espacios de Hilbert llamados trazas. Se estudia la traza de operadores de rango finito, la traza usual y la traza de Dixmier. Algunas aplicaciones de estos funcionales son mencionadas.

Palabras Claves: Operador compacto, traza de Dixmier, espacio de Hilbert.

ABSTRACT

"TRACES OF OPERATORS ON HILBERT SPACES"

Alfredo Sotelo Pejerrey

This research studies several functional on Hilbert spaces called traces. It is studied the trace of finite rank operators, the usual trace and the Dixmier trace. Some applications of these functional are mentioned.

Keywords: Compact operator, Dixmier trace, Hilbert space.

INTRODUCCIÓN

La traza de una matriz cuadrada se define como la suma de elementos de su diagonal o equivalentemente como la suma de sus valores propios. Este funcional es lineal y se anula en los conmutadores, es decir, $tr(AB) = tr(BA)$. En el contexto de operadores en espacios de Banach y Hilbert, un problema no trivial es determinar una clase de operadores donde se pueda definir un funcional traza, es decir, un funcional lineal que se anula en los conmutadores; este problema es difícil pues la suma de valores propios de un operador podría diverger.

El presente trabajo de investigación está centrado en el estudio de funcionales trazas sobre ciertos ideales de operadores. Inicialmente estudiamos la traza de operadores de rango finito y la traza usual definida sobre el ideal de operadores nucleares.

El primer ejemplo de traza singular fue dado por Jacques Dixmier en su artículo de 1966. Una traza singular es un funcional traza que se anula en el ideal de operadores de rango finito, es por ello que no es una extensión de la traza matricial usual. Este trabajo de investigación presenta una forma alternativa de la construcción de la traza de Dixmier y escogiendo un estado adecuado se construye la traza de Connes-Dixmier; todo esto es importante ya que sus aplicaciones se ven reflejadas en el libro de Alain Connes titulado geometría noconmutativa,



CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Sea H un espacio de Hilbert complejo infinito dimensional y F un operador lineal y acotado en H . El operador F es de rango finito si la dimensión de su imagen es finita, es decir, si $\dim (Im(T)) < \infty$; y el espacio de operadores de rango finito en H es denotado por $\mathcal{F}(H)$. Todo $F \in \mathcal{F}(H)$ puede representarse de la forma:

$$Fx = \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle y_k, \quad (x_k), (y_k) \subset H,$$

y usando esta representación, podemos definir el siguiente funcional

$$\begin{aligned} Tr: \mathcal{F}(H) &\rightarrow \mathbb{C} \\ Tr(F) &:= \sum_{k=1}^n \langle y_k, x_k \rangle. \end{aligned}$$

Este funcional satisface las siguientes propiedades:

- Tr es un funcional lineal
- $Tr(FS) = Tr(SF), \forall F \in \mathcal{F}(H), \forall S \in B(H)$, aquí $B(H)$ representa el álgebra de operadores lineales y acotados en H .
- $Tr(F) = \sum_k \lambda_k(F)$, aquí $\lambda_k(F)$ son los autovalores no nulos de F .

De las tres propiedades anteriores, vemos que el funcional Tr satisface las propiedades usuales de la traza matricial, es por ello, que el funcional lineal Tr es llamado funcional traza sobre $\mathcal{F}(H)$. Además, como toda matriz puede identificarse como un operador lineal entre espacios de dimensión finita, el funcional Tr es una extensión de la traza matricial. Esto nos conduce al estudio de definir funcionales sobre ciertos ideales de operadores que satisfacen las propiedades a), b) y c); a estos funcionales



los llamaremos funcionales trazas. Una especial atención tendremos en la propiedad c) ya que como trabajaremos sobre espacios de dimensión infinita, la suma de arriba podría diverger.

En la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática se dicta el curso electivo de la línea 1 de Teoría Espectral en espacios de Hilbert. Varias herramientas de este curso son usadas para trabajar este proyecto, es por ello que este trabajo de investigación puede considerarse como una aplicación de dicho curso.

1.2. Formulación del problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

Problema General:

¿Qué otras trazas de operadores en espacios de Hilbert podemos definir?

Problemas Específicos

1. ¿Toda traza es una extensión de la traza usual?
2. ¿Qué aplicaciones de los funcionales trazas existen?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivos generales

Construir la traza usual, traza de Dixmier, Connes-Dixmier de operadores en espacios de Hilbert.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Mostrar que existen trazas que no son extensiones de la traza usual.
2. Mostrar las aplicaciones de los funcionales traza para hallar la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.



1.4. Limitantes de la investigación

Un problema usual que se presenta cuando se trabaja sobre espacios de Hilbert es extender los resultados a espacios de Banach, es así que un limitante teórico de la investigación es trabajar en el contexto de espacios de Banach infinito dimensionales.

Por otro lado, debido al tiempo que llevará realizar las diversas etapas del proyecto como revisión e interpretación de la información bibliográfica y su traducción al español de los diversos artículos científicos; para la construcción de las trazas sobre ciertos ideales de operadores en espacios de Hilbert se establece el plazo de 12 meses como límite temporal para el desarrollo de todo el proyecto.

La limitante espacial se encuentra dentro del enfoque teórico de los espacios de Banach con la propiedad de aproximación y los espacios de Hilbert débiles.



CAPITULO II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

Nacional

J. Alcántara-Bode (2002) estudia el conjunto de trazas del operador A_ρ definido en $L^2(0,1)$ por $A_\rho(f)(\theta) = \int_0^\theta \rho(x) f(x) dx$. El estudio de este operador es importante por su relación con la famosa hipótesis de Riemann.

Internacional

- 1) J. Dixmier (1966). Es en este artículo donde construye la famosa traza de Dixmier, este fue el primer ejemplo de una traza singular definida sobre el ideal de operadores de Lorentz. Su importancia radica en sus aplicaciones a la Geometría No conmutativa, ello puede ser observado en el libro de Alain Connes titulado Geometría No conmutativa.
- 2) J.V. Varga (1989) introduce los operadores irregulares y excéntricos, estas clases de operadores, definidos sobre espacios de Hilbert, permiten establecer la existencia de trazas no triviales.
- 3) A. Albeverio, D. Guido, A. Ponsov, and S. Scarlatti (1996), caracteriza a aquellos operadores T definidos en espacios de Hilbert separables de tal manera que admitan una traza singular no trivial, es decir, existe una traza singular r en el ideal generado por T de tal forma que $0 < r(|T|) < \infty$. Estos operadores son los llamados excéntricos generalizados y generalizan a los operadores excéntricos dados en el artículo de J. Varga.
- 4) I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik (2000), es el texto más completo que trata de trazas y determinantes sobre espacios de Banach. Inicialmente se define trazas y determinantes de operadores de rango



finito sobre espacios de Banach para luego extender estos funcionales a subálgebras sumergidas con la propiedad de aproximación, por ejemplo, al subálgebra de operadores de clase traza o al subálgebra de operadores integrales con núcleo continuo.

2.2 MARCO

TEORICO

2.2.1 Espacios de Banach

Definición 2.2.1.1: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$. Una norma $\| \cdot \|$ es una aplicación definida en V con valores no negativos que satisface:

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in V, \alpha \in K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$

El par $(V; \| \cdot \|)$ será llamado espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.2:

Sea $n \geq 1$. En \mathbb{R}^n definimos las aplicaciones

- I. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- II. $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
- III. $\|x\|_{max} = \max\{|x_i|; i = 1; 2; 3; \dots; n\}$

Entonces $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|_1)$; $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|_2)$; $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|_{max})$ son espacios normados.

En particular, si $n = 1$, entonces $(\mathbb{R}; \| \cdot \|_1) = (\mathbb{R}; \| \cdot \|_2) = (\mathbb{R}; \| \cdot \|_{max}) = (\mathbb{R}, | \cdot |)$.

Ejemplo 2.2.1.3

El espacio de funciones continuas con valores en $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ definidas en $[a, b]$ es denotado por

$$C[a, b] = \{f: [a; b] \rightarrow K / f \text{ es continua } \}$$



$C[a, b]$ define un espacio vectorial sobre K con las operaciones de suma puntual de funciones y multiplicación por un escalar. Si definimos las aplicaciones en $C[a, b]$ por

$$I. \|f\|_{max} = \max\{|f(x)|; x \in [a; b]\},$$

$$II. \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx,$$

Se demuestra que los pares $(C[a, b]; \|\cdot\|_{max})$, $(C[a, b]; \|\cdot\|_1)$ son espacios normados.

Ejemplo 2.2.1.4

El espacio de sucesiones reales acotadas es denotado por

$$P^\infty(K) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}.$$

$P^\infty(K)$, con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar componente a componente, define un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , y si definimos la aplicación sobre $P^\infty(K)$:

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{sup} = \sup\{|a_n|; n \in \mathbb{N}\},$$

no es difícil demostrar que el par $(P^\infty(K); \|\cdot\|_{sup})$ es un espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.5

Para $p \geq 1$, definimos el espacio

$$L^p[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es Lebesgue medible y } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

El espacio $L^p[a, b]$ define un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con la suma puntual de funciones y la multiplicación por un complejo. La siguiente aplicación sobre $L^p[a, b]$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

define una norma en $L^p[a, b]$. Por lo tanto, el par $(L^p[a, b]; \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.6

Para $p \geq 1$, definimos el espacio



$$l^p(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}.$$

El espacio $l^p(\mathbb{R})$, con la suma y multiplicación por un real componente a componente, define un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una norma sobre $l^p(\mathbb{R})$ está dada por

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

Por lo tanto, el par $(l^p(\mathbb{R}); \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado.

Definición 2.2.1.7: Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio normado $(V; \|\cdot\|)$ se dice convergente a un punto $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}: \|a_n - x\| < \varepsilon; \forall n \geq n_0.$$

Que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converja al punto x es denotado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Definición 2.2.1.8: Sea $(V; \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión, decimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \|a_n - a_m\| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$$

Propiedades algebraicas de convergencia son dadas en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1.9

Sea $(V; \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ sucesiones en V .

Entonces

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = x + y$.

b) Si $\alpha \in K$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha x$.

Ejemplo 2.2.1.10

Consideremos el espacio normado $(C[0,1]; \|\cdot\|_1)$. Sea la sucesión de funciones continuas $f_n(x) = x^n$. Sea también $g(x) = 0$.

Como



$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

entonces $f_n \rightarrow 0$ con la norma $\|\cdot\|_1$. Sin embargo,

$$\|f_n - 0\|_{max} = 1$$

por lo tanto, la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a g con la norma $\|\cdot\|_{max}$.

Definición 2.2.1.11: Un espacio normado $(V; \|\cdot\|)$ es llamado espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en V es convergente en V .

Ejemplo 2.2.1.12

Los pares

- a) $(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_1)$; $(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_2)$; $(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_{max})$;
- b) $(L^p[a, b]; \|\cdot\|_p)$, $p \geq 1$;
- c) $(C[a, b]; \|\cdot\|_{max})$;
- d) $(l^p(\mathbb{R}); \|\cdot\|_p)$, $p \geq 1$;
- e) $(P^\infty(K); \|\cdot\|_{sup})$

son espacios de Banach.

Un resultado conocido en el contexto de espacios normados de dimensión finita es que todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. Más precisamente, el resultado es el siguiente:

Teorema 2.2.1.13: Si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado con $\dim V < \infty$, entonces $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

2.2.2 Espacios de Hilbert

Definición 2.2.2.1: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Un producto interno es una aplicación:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que se satisface:

- i. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \forall x, y, z \in V, \alpha, \beta \in K$



iii. $\langle x; y \rangle = \overline{\langle y; x \rangle} \quad \forall x, y \in V$

El par $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es llamado espacio con producto interno.

Observación 2.2.2.2

Todo producto interno satisface la siguiente propiedad:

Sea $x, y \in V, \alpha \in K$ luego:

$$\langle x; \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x; y \rangle$$

Un resultado elemental en todo espacio con producto interno es la desigualdad de Cauchy-Schwartz, resultado es el siguiente:

Teorema 2.2.2.3

Si $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces

$$|\langle x; y \rangle| \leq \langle x; x \rangle^{1/2} \langle y; y \rangle^{1/2} \quad \forall x, y \in V.$$

Observación 2.2.2.4

Todo producto interno induce una norma, más precisamente, si $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces $\|x\| = \langle x; x \rangle^{1/2}, x \in V$ define una norma en V .

Definición 2.2.2.5: Sea $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y B un subconjunto de V . El conjunto B es llamado ortonormal si $\langle x; y \rangle = 0, \forall x, y \in B$ con $x \neq y$; y $\langle x; x \rangle = 1, \forall x \in B$.

Definición 2.2.2.6: El par $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es llamado un espacio de Hilbert si es completo con la norma inducida por su producto interno.

Una desigualdad importante es la llamada desigualdad de Bessel:

Definición 2.2.2.7: Sea $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y B un subconjunto ortonormal de V . El conjunto B es llamado una base ortonormal de V si: $\langle x, b \rangle = 0, \forall b \in B$, entonces $x = 0$.

Ejemplo 2.2.2.8

Los pares

a) $(L^2[a, b]; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ donde



$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

b) $(l^2(\mathbb{R}); \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

c) $(\mathbb{R}^n; \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

definen espacios de Hilbert.

Ejemplo 2.2.2.9

Sobre el espacio vectorial $l^2(\mathbb{R})$ definimos el producto interno

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Se cumple que el par $(l^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert. Si definimos el vector

$$e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots),$$

donde el número 1 se ubica en el orden k -ésimo. Entonces el conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ define un conjunto ortonormal, más aún, define una base ortonormal para $l^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.2.2.10

La familia

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

Define una base ortonormal para el espacio $L^2[-\pi, \pi]$.

Una desigualdad bastante conocida en el contexto de espacios con producto interno es la desigualdad de Bessel:

Teorema 2.2.2.11 (Desigualdad de Bessel): Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ un conjunto ortonormal de V . Entonces



$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x; e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \forall x \in V.$$

Corolario 2.2.2.12: Sea $(H, \langle \cdot; \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ una base ortonormal de H . Entonces todo $x \in H$ puede escribirse de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k$$

Demostración:

Solo observe que

$$\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k, e_m \rangle = 0, \forall m \in \mathbb{N},$$

luego

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k$$

Observación 2.2.2.13

Si en la desigualdad de Bessel tomamos una base ortonormal, entonces la desigualdad se transforma en una igualdad. Mas precisamente,

Sea $(V, \langle \cdot; \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ una base ortonormal de V . Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x; e_n \rangle|^2 = \|x\|^2, \forall x \in V.$$

Esta última igualdad puede verse como una generalización del teorema de Pitágoras.

2.2.3 Operadores lineales acotados.

Definición 2.2.3.1: Sea $(V; \|\cdot\|_V)$ y $(W; \|\cdot\|_W)$ dos espacios normados.

Una aplicación $T: V \rightarrow W$ que satisface:

- i. $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in V$
- ii. $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$



es llamado un operador lineal.

El espacio de operadores lineales $T: V \rightarrow W$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma puntual de operadores y la multiplicación puntual por un escalar. Este espacio es denotado por

$$f(V, W) = \{T: V \rightarrow W : T \text{ es un operador lineal}\}$$

Definición 2.2.3.2: Sea $(V; \|\cdot\|_V)$ y $(W; \|\cdot\|_W)$ dos espacios normados. Un operador lineal $T: V \rightarrow W$ es llamado acotado si existe un $C > 0$ tal que $\|Tx\|_W \leq C\|x\|_V, \forall x \in V$.

El espacio de operadores lineales y acotados $T: V \rightarrow W$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma puntual de operadores y la multiplicación puntual por un escalar. Este espacio es denotado por

$$B(V, W) = \{T: V \rightarrow W : T \text{ es un operador lineal acotado}\}$$

La norma de un operador lineal y acotado $T: V \rightarrow W$ está definida por

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V} \right\} = \sup_{\|x\|=1} \{\|Tx\|_W\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|Tx\|_W\}.$$

Luego si

$$\|Tx\|_W \leq C\|x\|_V, \forall x \in V$$

entonces

$$\|T\| \leq C.$$

La norma de un operador lineal y acotado permite definir el siguiente espacio normado $(B(V, W), \|\cdot\|)$.

Ejemplo 2.2.3.3

Sea $T: (C[0,1]; \|\cdot\|_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \rightarrow T(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

Usando la linealidad de la integral, es inmediato afirmar que T es un operador lineal. Ahora veamos que T es un operador lineal acotado,

En efecto, si $f \in C[a, b]$, entonces



$$\begin{aligned}
|T(f)| &= \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \\
&\leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \max\{|f(x)| / x \in [a; b]\} dx = \int_0^1 \|f\|_{\max} dx \\
&= \|f\|_{\max} \int_0^1 1 dx = \|f\|_{\max},
\end{aligned}$$

luego

$$|T(f)| \leq \|f\|_{\max}.$$

Por lo tanto, T es acotado y $\|T\| \leq 1$.

Por otra parte, si $g = 1$ entonces

$$\frac{|Tg|}{\|g\|_{\max}} = 1 \leq \sup_{f \neq 0} \left\{ \frac{|Tf|}{\|f\|_{\max}} \right\} = \|T\|.$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = 1.$$

Ejemplo 2.2.3.4

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R})$, $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Es claro que T es un operador lineal. Como

$$\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\|_2 = \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2,$$

entonces T es acotado y

$$\|T\| = \sup_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0} \left\{ \frac{\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\|}{\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|} \right\} = \sup_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0} \left\{ \frac{\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|}{\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|} \right\} = 1.$$

Ejemplo 2.2.3.5

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R})$, $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$. Es claro que T es un operador lineal. Como

$$\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\|_2 \leq \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2,$$

entonces T es acotado y $\|T\| \leq 1$.

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ entonces $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (1, 0, 0, \dots)$ y

$$\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\| = 1.$$

Luego



$$\frac{\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\|}{\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|} = 1 \leq \|T\|.$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = 1.$$

2.2.4 Operadores compactos

Definición 2.2.4.1: Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y $T \in f(H_1; H_2)$. El operador T es llamado de rango finito si $\dim(ImT) < \infty$, donde ImT denota la imagen o rango de T .

El espacio de operadores de rango finito de H_1 a H_2 es denotado por

$$F(H_1; H_2) = \{T \in f(H_1; H_2) : T \text{ es de rango finito}\}.$$

Adicionalmente a esto, si $H_1 = H_2$ entonces $F(H_1; H_1)$ será denotado por $F(H_1)$.

Ejemplo 2.2.4.2

Sea H un espacio de Hilbert y $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vectores en H . Sea el operador $T: H \rightarrow H$

$$Tx = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente T es un operador lineal y acotado. Por otra parte, como

$$Im(T) \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Entonces

$$\dim(Im(T)) \leq n,$$

por lo tanto, T es un operador de rango finito.

Ejemplo 2.2.4.3

Sobre el espacio $L^2[a, b]$ definimos el operador

$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) \int_a^b f(s) \overline{v_j(s)} ds,$$

donde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son conjuntos de funciones en $L^2[a, b]$.

El operador K puede expresarse de la forma



$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) \langle f, v_j \rangle,$$

luego

$$Kf = \sum_{j=1}^n w_j \langle f, v_j \rangle,$$

entonces

$$\text{Im}(K) \subset \text{span}\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\},$$

Por lo tanto,

$$\dim(\text{Im}(K)) \leq n,$$

por lo tanto, K es un operador de rango finito.

El siguiente teorema muestra que el espacio $F(H_1; H_2)$ tiene estructura de subespacio vectorial.

Teorema 2.2.4.4: $F(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial del espacio $f(H_1; H_2)$.

Demostración:

Si $T_1, T_2 \in F(H_1; H_2)$, entonces

$$\dim \text{Im}(T_1 + T_2) \leq \dim \text{Im}(T_1) + \dim \text{Im}(T_2) < \infty.$$

Por lo tanto

$$T_1 + T_2 \in F(H_1; H_2).$$

Obviamente que $\beta T_1 \in F(H_1; H_2)$ para todo β escalar.

Definición 2.2.4.5: Sean $H_1; H_2$ dos espacios de Hilbert y $T \in f(H_1; H_2)$.

El operador T es llamado compacto si para toda sucesión acotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_1$ existe una subsucesión de $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_2$ convergente.

El espacio de operadores compactos de H_1 a H_2 es denotado por

$$K(H_1; H_2) = \{T \in f(H_1; H_2) / T \text{ es compacto}\}$$

Si $H_1 = H_2$ entonces $K(H_1; H_1)$ se escribirá como $K(H_1)$.

El siguiente teorema muestra que el espacio $K(H_1; H_2)$ tiene estructura de subespacio vectorial.

Teorema 2.2.4.6: $K(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial de $f(H_1; H_2)$.

Demostración:

Sea $T_1, T_2 \in K(H_1; H_2)$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_1$ una sucesión acotada entonces existe una subsucesión $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que la sucesión $(Tx_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset H_2$ es convergente.

Como T_2 es compacto entonces existe una subsucesión $(x_{n''})_{n'' \in \mathbb{N}} \subset (x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ tal que la sucesión $(Tx_{n''})_{n'' \in \mathbb{N}} \subset H_2$ es convergente.

Luego la sucesión $((T_1 + T_2)(x_{n''}))$ es convergente. Por lo tanto, el operador $T_1 + T_2$ es compacto.

Trivialmente $\beta T_1 \in K(H_1; H_2)$ para todo β escalar.

Teorema 2.2.4.7: $K(H)$ es un ideal bilátero del álgebra $f(H)$.

Demostración:

Por el teorema anterior $K(H)$ es un subespacio de $f(H)$. Veamos ahora que $TR, RT \in K(H), R \in K(H), T \in f(H)$.

En efecto, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ sucesión acotada entonces existe una subsucesión $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $Rx_{n'} \rightarrow r$ como T es continua se tiene $TRx_{n'} \rightarrow Tr$. Por tanto TR es compacto.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión acotada entonces $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Luego existe una subsucesión $(x_{n''})_{n'' \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(RTx_{n''})_{n'' \in \mathbb{N}}$ es convergente.

El teorema de Bolzano-Weierstrass en el contexto de \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n establece que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. El siguiente teorema generaliza este resultado a espacios de Banach de dimensión finita. El resultado es el siguiente:

Teorema 2.2.4.8: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces $\dim X < \infty$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ acotada, existe una subsucesión $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente.

Demostración:

Supongamos que $\dim X = n$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base para X .

Sea $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión acotada. Entonces existe un $M > 0$ tal que $\|x^k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$.

Cada elemento de la sucesión x^k puede escribirse como combinación lineal de elementos de la base, esto es,

$$x^1 = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_2^1 e_2 + \dots + \alpha_n^1 e_n$$

$$x^2 = \alpha_1^2 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \dots + \alpha_n^2 e_n$$

$$x^j = \alpha_1^j e_1 + \alpha_2^j e_2 + \dots + \alpha_n^j e_n$$

Por el lema de la combinación lineal tenemos que existe $c_j > 0$ tal que

$$(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|)c_j \leq \|x^j\| < M; \quad j \in \mathbb{N}.$$

Luego para $1 \leq p \leq n$ tenemos que

$$|\alpha_p^j| \leq \frac{|\alpha_1^j| + |\alpha_2^j| + \dots + |\alpha_n^j|}{c_j} \leq \frac{M}{c_j}.$$

Entonces la sucesión $(\alpha_p^j)_{j \in \mathbb{N}}$ es acotada. Luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión $(\alpha_p^{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (\alpha_p^j)_{j \in \mathbb{N}}$ convergente, digamos que $\alpha_p^{j_k} \rightarrow \alpha_p$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Sea

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \in X,$$

luego



$$x^{jk} = \alpha_1^{jk} e_1 + \alpha_2^{jk} e_2 + \dots + \alpha_n^{jk} e_n$$

Obviamente $(x^{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Además

$$\|x^{jk} - x\| = \left\| \sum_{p=1}^n (\alpha_p^{jk} - \alpha_p) e_p \right\| \leq \sum_{p=1}^n |\alpha_p^{jk} - \alpha_p| \cdot \|e_p\| \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{jk} = x.$$

Esto nos dice que existe una subsucesión $(x^{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ convergente.

Para la otra implicación, supongamos que $\dim X = \infty$.

Sea $x_1 \in X / \|x_1\| = 1$ y sea $f_1 = \text{span}\{x_1\}$. Luego f_1 es un conjunto cerrado en X . Luego por el lema de Riesz, para $\theta = \frac{1}{2}$ existe un $x_2 \in X / \|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}$ y $\|x_2\| = 1$.

Sea ahora $f_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$. Luego f_2 es un conjunto cerrado en X . Luego por el lema de Riesz, existe un $x_3 \in X / \|x_3 - x\| \geq \theta = \frac{1}{2} \forall x \in f_2$ y $\|x_3\| = 1$.

1. En particular tenemos que

$$\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \text{ A } \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$$

Siguiendo este proceso de forma inductiva, tenemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en la bola unitaria cerrada $\bar{B}(\bar{0}; \bar{1})$ tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2},$$

lo cual nos dice que de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no se puede extraer subsucesiones convergentes, lo cual contradice la hipótesis.





Como consecuencia directa del teorema 2.2.4.8 se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.2.4.9

a) Todo operador de rango finito es compacto, es decir,

$$F(H_1; H_2) \subset K(H_1; H_2)$$

b) Si $T \in f(H_1; H_2)$ y $\dim H_1 < \infty$, entonces $T \in K(H_1; H_2)$.

El siguiente teorema prueba que el espacio de operadores compactos es cerrado con la norma de operadores.

Teorema 2.2.4.10

Sea (T_n) una sucesión en $K(H)$ tal que $T_n \rightarrow T \in f(H)$. Entonces $T \in K(H)$.

Veamos algunos ejemplos de operadores compactos:

Ejemplo 2.2.4.11

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y (e_n) un conjunto ortonormal infinito en H . Consideremos a I como el operador identidad, luego

$$\|Ie_n - Ie_m\| = \sqrt{2},$$

El cual implica que (Ie_n) no tiene subsucesiones convergentes. Por lo tanto, el operador identidad I no es compacto.

Ejemplo 2.2.4.12

Sea H un espacio de Hilbert y $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vectores en H . Sea el operador $T: H \rightarrow H$ definido por

$$Tx = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente T es un operador lineal y acotado. Por otra parte, como

$$Im(T) \subset span\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Entonces



$$\dim(\text{Im}(T)) \leq n,$$

por lo tanto, T es un operador de rango finito, y por el teorema 2.2.4.9, T es compacto.

Ejemplo 2.2.4.13

Sobre el espacio $L^2[a, b]$ definimos el operador

$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) \int_a^b f(s) v_j(s) ds,$$

donde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son conjuntos de funciones en $L^2[a, b]$.

El operador K puede expresarse de la forma

$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) \langle f, v_j \rangle,$$

luego

$$Kf = \sum_{j=1}^n w_j \langle f, v_j \rangle,$$

entonces

$$\text{Im}(K) \subset \text{span}\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\},$$

Por lo tanto,

$$\dim(\text{Im}(K)) \leq n,$$

por lo tanto, K es un operador de rango finito. Luego, por el teorema 2.2.4.9, K es un operador compacto.

Ejemplo 2.2.4.14

Sea (φ_n) una sucesión en \mathbb{C} que converge a cero. Definimos el operador T en l^2 por

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1 \varphi_1, \alpha_2 \varphi_2, \dots, \alpha_n \varphi_n, \dots).$$

Para cada natural n , sea T_n el operador en l^2 definido por

$$T_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1 \varphi_1, \alpha_2 \varphi_2, \dots, \alpha_n \varphi_n, 0, 0, 0 \dots).$$

Es claro que cada T_n es de rango finito y

$$\|T_n - T\| \leq \sup_{k \geq n} |\varphi_k| \rightarrow 0.$$



Por lo tanto, la sucesión (T_n) converge a T , y como cada T_n es de rango finito, entonces cada T_n es compacto (teorema 2.2.4.9). Finalmente, por el teorema 2.2.4.10, T es compacto.

De ahora en adelante, a partir del teorema de representación de Riesz, vamos a introducir el operador adjunto de un operador lineal y acotado en espacios de Hilbert.

El teorema de representación de Riesz es conocido y puede encontrarse en cualquier referencia de Análisis Funcional. El resultado es el siguiente:

Teorema 2.2.4.15 (Representación de Riesz)

Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y $h: H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$, donde una forma sesquilineal acotada, es decir un funcional lineal respecto a la primera componente y lineal conjugada respecto a la segunda componente; además existe un $M > 0$ tal que $|h(x; y)| \leq M\|x\|\|y\|, \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$. Entonces h puede escribirse de la forma $h(x; y) = \langle Sx; y \rangle$, donde: $S: H_1 \rightarrow H_2$ es un operador lineal acotado. Además S está únicamente determinado por h y

$$\|S\| = \|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \left\{ \frac{|h(x; y)|}{\|x\|\|y\|} \right\}.$$

A continuación, mostramos la existencia del operador adjunto:

Teorema 2.2.4.16 (existencia y unicidad del operador adjunto): Sean $H_1 ; H_2$ dos espacios de Hilbert y consideremos $T: H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado. Entonces existe un único operador $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ lineal y acotado tal que:

$$\langle Tx; y \rangle = \langle x; T^*y \rangle \quad y \quad \|T\| = \|T^*\|$$

Demostración:

Basta introducir la forma sesquilineal acotada:



$$h: H_2 \times H_1 \rightarrow \mathbb{C}; h(y; x) = \langle y; Tx \rangle.$$

El siguiente teorema establece que todo operador lineal y acotado es compacto si y solo si su adjunto lo es.

Teorema 2.2.4.17

Un operador lineal y acotado $T: H \rightarrow H$ es compacto si y solo si T^* es compacto.

Definición 2.2.4.18: Un operador lineal $T: H \rightarrow H$ se dice autoadjunto si $T = T^*$ donde H es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 2.2.4.19

Sea (φ_n) una sucesión en \mathbb{C} que converge a cero. Definimos el operador lineal y acotado T en l^2 por

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1\varphi_1, \alpha_2\varphi_2, \dots, \alpha_n\varphi_n, \dots).$$

El adjunto de T es

$$T^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1\overline{\varphi_1}, \alpha_2\overline{\varphi_2}, \dots, \alpha_n\overline{\varphi_n}, \dots).$$

Ejemplo 2.2.4.20

Sea H un espacio de Hilbert y $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vectores en H . Sea el operador lineal y acotado $T: H \rightarrow H$ definido por

$$Tx = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Entonces T es autoadjunto.

Ejemplo 2.2.4.21

Sea

$$T: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

El adjunto de T es

$$T^*: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R}), T^*((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_2, a_3, \dots).$$



Ejemplo 2.2.4.22

Sea $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$ y $T: L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ definido por

$$(Tf)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds.$$

El operador lineal T es acotado, más precisamente,

$$\|T\| \leq \left[\int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

y su adjunto es

$$(T^*g)(t) = \int_a^b \overline{k(\overline{s}, \overline{t})}g(s)ds.$$

Definición 2.2.4.23: Consideremos un espacio de Hilbert H y un operador lineal acotado:

$$T: H \rightarrow H$$

El escalar $\beta \in \mathbb{C}$ es llamado valor propio o autovalor de T si existe un vector no nulo $x \in H$, tal que $T(x) = \beta x$.

Todo vector no nulo que satisfaga la condición anterior se llama vector propio o autovector de T , asociado al valor propio β .

Ejemplo 2.2.4.24

Sea

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

El operador K es un operador lineal acotado y compacto. Veamos que K no tiene autovalores. En efecto, si $Kf = \beta f$, entonces



$$\int_0^t f(s) ds = \beta f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$f(t) = \beta f'(t), \quad f(0) = 0,$$

luego $f = 0$.

Teorema 2.2.4.25: Los autovalores de un operador autoadjunto $T \in f(H)$ son números reales y sus autovectores correspondientes a distintos autovalores, son ortogonales.

Demostración:

Sea $T \in f(H)$ un operador autoadjunto, luego $T = T^*$ y sea λ un autovalor de T , correspondiente al autovector v , entonces: $Tv = \lambda v$.

Como

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$$

entonces

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

Por otro lado, sean λ, β autovalores diferentes y sus respectivos autovectores $v; w$, entonces

$$Tv = \lambda v; Tw = \beta w.$$

Luego

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = \langle v, \beta w \rangle = \beta \langle v, w \rangle.$$

Lo que implica que

$$(\lambda - \beta) \langle v, w \rangle = 0.$$

Como $\lambda \neq \beta$ entonces

$$\langle v; w \rangle = 0.$$



Otra forma de expresar la norma de un operador lineal y acotado autoadjunto se da en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.4.26: Sea T un operador autoadjunto, entonces:

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx; x \rangle| / \|x\| = 1\}.$$

Demostración:



Por la desigualdad de Cauchy Schwartz

$$|\langle Tx, y \rangle| = |\langle y, Tx \rangle| \leq \|y\| \|Tx\| \leq \|y\| \|T\| \|x\| = \|T\| \|x\| \|y\|$$

Para $x = y$, $\|x\| = 1$ se tiene

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|x\| = \|T\|$$

lo que implica que

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\} \leq \|T\|.$$

Por lado, denotemos por

$$s = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\}$$

Sea $x, y \in H$ entonces

$$\langle T(x + y), x + y \rangle - \langle T(x - y), x - y \rangle = 4\operatorname{Re}\langle Tx, y \rangle$$

Aplicando desigualdad triangular y la identidad del paralelogramo, tenemos

$$\begin{aligned} 4|\operatorname{Re}\langle Tx, y \rangle| &\leq |\langle T(x + y), x + y \rangle| + |\langle T(x - y), x - y \rangle| \\ &\leq s(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = 2s(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

En particular, si tomamos $x \in H$ con $\|x\| = 1$ y $Tx \neq 0$, $y = \|Tx\|^{-1}Tx$ se obtiene

$$\|Tx\| = \operatorname{Re}\langle Tx, \|Tx\|^{-1}Tx \rangle \leq \frac{1}{2} s(1 + 1) = s$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$



2.2.5 Teoremas espectrales

Teorema 2.2.5.1: Sea H un espacio de Hilbert y $T \in f(H)$ compacto y autoadjunto, entonces $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un autovalor de T .

Demostración:

Si $T = 0$ se tiene $\lambda = 0$ y por lo tanto el resultado es trivial.

Ahora supongamos que $T \neq 0$, como T es autoadjunto entonces por el teorema 2.2.4.26 tenemos que



$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Luego existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1} \subset H$ tal que

$$\|x_n\| = 1 \text{ y } |\langle Tx_n, x_n \rangle| \rightarrow \|T\|.$$

Luego la sucesión $(\langle Tx_n, x_n \rangle)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ es acotada y por el teorema de Bolzano – Weierstrass existe una subsucesión $(x_{n'}) \subset (x_n)$ tal que

$$\langle Tx_{n'}, x_{n'} \rangle \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$|\langle Tx_{n'}, x_{n'} \rangle| \rightarrow |\lambda| = \|T\|,$$

de donde $\lambda = \|T\|$ o $\lambda = -\|T\|$.

Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad que $\lambda = \|T\|$.

Como

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tx_{n^F} - \|T\|x_{n^F}\|^2 &= \|Tx_{n^F}\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n^F}, x_{n^F} \rangle + \|T\|^2 \\ &\leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n^F}, x_{n^F} \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$Tx_{n^F} - \|T\|x_{n^F} \rightarrow 0.$$

Luego, por compacidad existe una subsucesión $(x_{n^{FF}}) \subset (x_{n^F})$ tal que $Tx_{n^{FF}} \rightarrow y \in H$, esto nos dice que $(\|T\|x_{n^{FF}}) \rightarrow y$. Por lo tanto $x_{n^{FF}} \rightarrow \frac{y}{\|T\|}$, concluyendo que $Tx_{n^{FF}} \rightarrow T\left(\frac{y}{\|T\|}\right) = y$. Por tanto, $T(y) = \|T\|y$ de donde $\|T\|$ es autovalor de “ T ”



Lema 2.2.5.2: Sea $T \in f(H)$ y M un subespacio invariante por T , es decir, $T(M) \subset M$. Entonces M^\perp es invariante por T^* .

Demostración:

Sea $y \in M^\perp$, entonces para cada $x \in M$ se tiene $\langle x; T^*y \rangle = \langle Tx; y \rangle = 0$ (pues $T(M) \subset M$). Luego:

$$T^*y \in M^\perp.$$



Teorema 2.2.5.3: (Espectral para operadores compactos autoadjuntos)

Sea $T \in f(H)$ un operador compacto autoadjunto, entonces existe un sistema ortonormal $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ de autovectores de T con autovalores correspondientes: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tal que para cada $x \in H$, se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \langle x, x_n \rangle x_n \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

Si la sucesión $(\lambda_n(T))$ es infinita, entonces: $\lambda_n(T) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración:

Por el teorema 2.2.5.1, T tiene un auto valor λ_1 tal que $|\lambda_1| = \|T\|$. Sea x_1 un autovector asociado a λ_1 tal que $\|x_1\| = 1$.

Sea $H_2 = (\text{span}\{x_1\})^\perp$. Como $(\text{span}\{x_1\})^\perp$ es invariante por T , entonces por el lema 2.2.5.2, H_2 es invariante por $T^* = T$, ($T(H_2) \subset H_2$).

Ahora consideremos $T_2 = T/H_2$, entonces T_2 es compacto y autoadjunto en H_2 , luego por el teorema 2.2.5.1, T_2 tiene un autovalor λ_2 con $|\lambda_2| = \|T_2\|$, además $|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T\| = |\lambda_1|$.

Sea x_2 un autovector asociado a λ_2 tal que $\|x_2\| = 1$.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ consideramos $x_1 \perp x_2$
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $x_1 \perp x_2$, por teorema.

Ahora sea $H_3 = (\text{span}\{x_1; x_2\})^\perp$, entonces por el lema 2.2.5.2 tenemos que $T(H_3) \subset H_3 \subset H_2 \subset H_1 = H$.

Ahora consideremos $T_3 = T/H_3$, entonces T_3 es compacto y autoadjunto en H_2 .

Continuando con este proceso, hemos construido una sucesión de autovalores $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de T tal que $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y un sistema ortonormal de vectores $\{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$.

Como T es compacto, entonces si la sucesión $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ es infinita tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1} = 0$.

Ahora veamos la representación de T :



Caso 1: si $T_{n+1} = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sea

$$y_n = x - \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle x_j \Rightarrow y_n \in H_{n+1} = (f\{x_1; x_2; \dots; x_n\})^\perp$$

$$T_{n+1}(y_n) = T(y_n) = 0$$

$$\Rightarrow T(x - \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle x_j) = 0 \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle T(x_j)$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle \lambda_j x_j \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j.$$

Caso 2 $T_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Sea:

$$y_n = x - \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle x_j ; y_n \in (f\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\})^\perp = H_{n+1}$$

$$\Rightarrow \|T_{n+1}(y_n)\| = \|T(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j\| \leq \|T_{n+1}\| \|y_n\|,$$

Pero:

$$\|y_n\| = \|x - \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle x_j\| \leq \|x\|,$$

Por tanto:

$$\|T(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j.$$

■

Si suponemos que T es un operador compacto, la representación es la dada en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.5.4: (Espectral para operadores compactos)

Sea $T \in f(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n \geq 1} \subset H_1; (y_n)_{n \geq 1} \subset H_2$ tal que para cada $x \in H_1$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

Además, se tiene que $s_n(T) \rightarrow 0$ si $(s_n(T))$ es infinito.

Demostración:

Sea $T \in f(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces $T^*T \in f(H_1)$ es compacto y autoadjunto luego por el teorema 2.2.5.3, tenemos un sistema ortonormal $\{x_1, x_2, \dots\}$ de autovectores de T^*T y

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T^*T) \langle x; x_n \rangle x_n.$$

Por otra parte, como

$$\langle T^*Tx; x \rangle = \langle Tx; Tx \rangle = \|Tx\|^2 > 0$$

entonces $\lambda_n(T^*T) \geq \lambda_{n+1}(T^*T) > 0$.

Probemos la siguiente afirmación:

Afirmación:

$$Ker(T) = Ker(T^*T)$$

(\subset) Trivial

(\supset) Sea $x \in Ker(T^*T) \Rightarrow T^*Tx = 0 \Rightarrow \langle T^*Tx; x \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tx; Tx \rangle = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in Ker(T)$.

Consideremos

$$y_n = \frac{Tx_n}{\sqrt{\lambda_n(T^*T)}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle y_n; y_m \rangle &= \frac{\langle Tx_n; Tx_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T)} \cdot \lambda_m(T^*T)} = \frac{\langle T^*Tx_n; x_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T)} \cdot \lambda_m(T^*T)} \\ &= \frac{\langle \lambda_n(T^*T)x_n; x_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T)} \cdot \lambda_m(T^*T)} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$



Como $H_1 = (Ker T) \oplus (Ker T)^\perp, (Ker T)^\perp = \overline{Im}$ entonces por el teorema 2.2.5.3, tenemos que $\{x_1; x_2; \dots\}$ es una base ortonormal para \overline{Im}

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x; x_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H_1.$$

Luego

$$\begin{aligned} x \in H_1 = (Ker T) \oplus \overline{Im} &\Rightarrow x = u + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n \rangle x_n \\ &\Rightarrow Tx = Tu + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n \rangle Tx_n, \end{aligned}$$

Pero $Tu = 0$, pues $u \in Ker T$

De donde

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n(T^*T)} \langle x; x_n \rangle y_n.$$

Si escribimos $s_n(T) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}$ entonces

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n. \quad \blacksquare$$

Observación 2.2.5.5

$s_n(T)$ es llamado el n – esimo numero singular de T

La representación (2.2) es llamada la representación Hilbert – Schmidt de T .

El siguiente corolario, muestra que todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito. Mas precisamente, se tiene el siguiente teorema:

Corolario 2.2.5.6: $\overline{Im} = K(H)$.



Demostración:

Sea $T \in K(H)$ entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n \geq 1} \subset H$; $(y_n)_{n \geq 1} \subset H$ tal que para cada $x \in H$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n, \quad s_n(T) \rightarrow 0 \text{ si } (s_n(T)) \text{ es infinito.}$$

Si definimos

$$T_n = \sum_{k=1}^n s_k(T) \langle \cdot; x_k \rangle y_k \in F(H),$$

entonces $T_n \rightarrow T$, por lo tanto $T \in \overline{F(H)}$. ■

De forma similar al corolario anterior, puede demostrarse el siguiente corolario:

Corolario 2.2.5.7: Sea el operador lineal B definido en un espacio de Hilbert H por

$$Bx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x; x_n \rangle y_n$$

donde (x_n) , (y_n) son sistemas ortonormales y $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de números no negativos que converge a cero, entonces B es compacto y $a_n = s_n(T)$.

El siguiente corolario, calcula la adjunta de un operador compacto, vía la representación Hilbert-Schmidt.

Corolario 2.2.5.8: Sea

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n$$

la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; y_n \rangle x_n.$$



Demostración:

Por linealidad y continuidad, basta demostrar que

$$(\langle \cdot, x_n \rangle y_n)^* = (\langle \cdot, y_n \rangle x_n)^*.$$

Sea

$$R = \langle \cdot, x_n \rangle y_n \Rightarrow R.$$

Entonces

$$x = \langle x, x_n \rangle y_n.$$

Luego

$$\langle Rx, y \rangle = \langle \langle x, x_n \rangle y_n, y \rangle = \langle x, x_n \rangle \langle y_n, y \rangle = \langle x, \langle y, y_n \rangle x_n \rangle$$

por lo tanto,

$$R^*y = \langle y, y_n \rangle x_n.$$

Es así que

$$R^* = \langle \cdot, y_n \rangle x_n. \quad \blacksquare$$

Observación 2.2.5.9

Como

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, y_n \rangle x_n,$$

Entonces por el corolario 2.2.5.8 tenemos que

$$s_n(T) = s_n(T^*)$$

El siguiente teorema, demuestra otra representación de los números singulares.

Teorema 2.2.5.10

$$s_n(T) = \min_{\dim M=n-1} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp M}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Luego

$$s_1(T) = \|T\|$$

Como consecuencia directa del teorema anterior, tenemos el corolario siguiente:

Corolario 2.2.5.11: Sea A un operador compacto y B un operador acotado
Entonces:

$$s_n(AB) \leq \|B\|s_n(A)$$

$$s_n(BA) \leq \|B\|s_n(A)$$

El siguiente corolario puede encontrarse en I. Gohberg, S. Goldberg and K. Krupnik (2000), pag. 52. y afirma que:

Corolario 2.2.5.12: Si A y B son operadores compactos, entonces:

$$|s_n(A) - s_n(B)| \leq \|A - B\|; \forall n \in \mathbb{N}$$

Observación 2.2.5.13

Por el corolario anterior, si $A_n \rightarrow A$ entonces $s_k(A_n) \rightarrow s_k(A)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Ejemplo 2.2.5.14

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H .
Consideremos el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente el operador T es un operador lineal y acotado. Para cada n consideremos el operador

$$T_n x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Se cumple que

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

Como cada T_n es de rango finito entonces es compacto. Por el corolario 2.2.5.6 concluimos que T es compacto. Finalmente, por el corolario 2.2.5.7 tenemos que

$$s_n(T) = \frac{1}{n}.$$

Ejemplo 2.2.5.15

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H .
Consideremos el siguiente operador:



$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente el operador T es un operador lineal y acotado. Para cada n consideremos el operador

$$T_n x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Se cumple que

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

Como cada T_n es de rango finito entonces es compacto. Por el corolario 2.2.5.6 concluimos que T es compacto. Finalmente, por el corolario 2.2.5.7 tenemos que

$$s_n(T) = \frac{1}{n^2}.$$

Ejemplo 2.2.5.16

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(T) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Varias desigualdades de los números singulares son dados en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.5.17

Para cada $n \geq 1$ se cumplen las siguientes desigualdades:

1. $\sum_{j=1}^n |\lambda_j(A)| \leq \sum_{j=1}^n s_j(A)$
2. $\prod_{j=1}^n |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^n s_j(A)$
3. $\sum_{j=1}^n |\lambda_j(A)|^p \leq \sum_{j=1}^n [s_j(A)]^p, p \geq 1.$
4. $[\sum_{j=1}^n \mathfrak{F}(A+B)]^p \leq \sum_{j=1}^n (\mathfrak{F}(A) + \mathfrak{F}(B))^p, p \geq 1.$



5. $\sum_{j=1}^n (s_j(AB))^p \leq \sum_{j=1}^n (s_j(A))^p (s_j(B))^p, p \geq 1.$
6. $\prod_{j=1}^n s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^n s_j(A)s_j(B)$
7. $(\sum_{j=1}^n (s_j(A+B))^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{j=1}^n (s_j(A))^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{j=1}^n (s_j(B))^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$

2.2.6 Trazas de Operadores

Definición 2.2.6.1: Una traza φ sobre un ideal bilatero de operadores J es un funcional lineal positivo unitariamente invariante, esto es $\varphi: J \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y $\varphi(U^*TU) = \varphi(T); \forall T \in J, \forall U \in f(H)$ unitario.

En el contexto de espacios de Banach, la definición de traza puede reformularse de la siguiente forma:

Teorema 2.2.6.2: Sea J un ideal bilatero en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

Un funcional lineal φ sobre J es una traza si y solo si

$$\varphi(AB) = \varphi(BA); \forall A \in J, \forall B \in f(H)$$

Demostración:

$$(\Leftarrow) \varphi(U^*(TU)) = \varphi(U^*(UT)) = \varphi((U^*U)T) = \varphi(T)$$

(\Leftarrow) Es conocido que todo operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert puede expresarse como combinación lineal de cuatro operadores positivos, es decir, si $B \in f(H)$ entonces

$$B = \sum_{i=1}^4 \alpha_i U_i; \text{ donde } U_i \in f(H) \text{ unitario, } \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,3,4.$$

Primero veamos que

$$\varphi(UA) = \varphi(AU); \forall A \in J, \forall U \in f(H) \text{ unitario.}$$

En efecto,

$$\varphi(UA) = \varphi(U^*UAU) = \varphi(AU).$$

Como

$$B = \sum_{i=1}^4 \alpha_i U_i,$$

entonces



$$\begin{aligned} \varphi(AB) &= \varphi \left(A \sum_{i=1}^4 \alpha_i U_i \right) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi(AU_i) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi(U_i A) = \varphi \left(\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i U_i \right) A \right) \\ &= \varphi(BA). \end{aligned}$$



2.2.6.1 La traza de Operadores de Rango Finito

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Consideremos un operador de rango finito $F \in \mathcal{F}(H)$. Luego podemos considerar $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ una base para $Im(F)$. Es conocido que F puede representarse de la forma:

$$Fx = \sum_{j=1}^m g_j(x) \varphi_j, \quad (g_j) \subset X^*.$$

La traza de F está definida

$$tr(F) = \sum_{j=1}^m g_j(\varphi_j).$$

Esta traza, definida sobre el ideal de operadores de rango finito, es un funcional lineal y verifica

$$tr(AF) = tr(FA); \quad \forall F \in \mathcal{F}(X), \forall A \in f(X).$$

Por lo tanto, el funcional lineal tr es una traza sobre el ideal bilatero $\mathcal{F}(H)$. Además, el funcional tr es espectral, es decir, si $F \in \mathcal{F}(H)$ entonces

$$tr(F) = \sum_j \lambda_j,$$

donde (λ_j) son los valores propios no nulos de F .

2.2.6.2 La traza Usual

A continuación, vamos a definir el ideal de operadores nucleares.

En lo que sigue H denotará un espacio de Hilbert separable infinito dimensional.

Definición 2.2.6.2.1: Sea H un espacio de Hilbert separable y $T \in K(H)$. El operador T es llamado nuclear o de clase traza si

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty.$$



El espacio de operador nucleares es denotado por

$$S_1(H) = \{A \in f(H) : A \text{ es compacto y } \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty\}.$$

Usando la proposición 2.2.5.17 no es difícil demostrar que $S_1(H)$ es un ideal bilatero del espacio $f(H)$ de operadores lineales y acotados.

A continuación, definimos una norma en el espacio de operadores nucleares:

Teorema 2.2.6.2.2:

$$\| \cdot \|_1: S_1(H) \rightarrow \mathbb{R}_+^+$$

$$A \mapsto \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \text{ es una norma}$$

Demostración:

1) Como los $s_j(A) \geq 0, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \geq 0$

Además

$$\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = 0 \Rightarrow s_1(A) = \|A\|_{f(H)} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

2) Sea $\alpha \in \mathbb{C}, A \in S_1(H)$, entonces

$$\|\alpha A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\alpha A) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j[(\alpha A)^*(\alpha A)]} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 \cdot \lambda_j[A^*A]}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha| \sqrt{\lambda_j[A^*A]} = |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = |\alpha| \cdot \|A\|_1$$

3) Usando las desigualdades de los números singulares tenemos que

$$\|A + B\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A + B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(B) = \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

Teorema 2.2.6.2.3: $(S_1(H), \| \cdot \|_1)$ es un espacio de Banach.



Demostración:

Sea $(A_n)_{n \geq 1} \subset S_1(H)$ una sucesión de Cauchy, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad m, n \geq m_0 \Rightarrow \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon$$

Pero

$$\|A_m - A_n\|_{f(H)} = s_1(A_m - A_n) \leq \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon.$$

Luego $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $f(H)$ el cual es completo, entonces existe un operador $A \in f(H)$ tal que $\|A_m - A\|_{f(H)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, además como cada A_m es compacto, por el corolario 2.2.5.6, tenemos que A es compacto.

También

$$\sum_{j=1}^k s_j(A_n - A_m) \leq \|A_n - A_m\|_1 < \varepsilon,$$

y haciendo $m \rightarrow \infty$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^k s_j(A_n - A) \leq \varepsilon, \forall n > m_0 \Rightarrow \|A_n - A\|_1 \leq \varepsilon, \forall n > m_0$$

Por lo tanto,

$$A_n \rightarrow A,$$

en la norma $\| \cdot \|_1$. ■

A continuación, introducimos la traza usual de un operador nuclear:

Definición 2.2.6.2.4: Sea $A \in f(H)$ un operador compacto y sea (φ_n) una base ortonormal de H . La traza usual de A está definida por:

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n; \varphi_n \rangle$$

El siguiente teorema muestra que la suma de arriba está bien definida:

Teorema 2.2.6.2.5: Si $T \in S_1(H)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$



converge absolutamente para cualquier base ortonormal (e_k) de H y su suma es independiente de la elección de la base.

Demostración:

Sea

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x_n, \cdot \rangle y_n$$

la representación Hilbert-Schmidt de T . Primeramente, veamos que la serie del enunciado converge absolutamente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle e_k, x_n \rangle y_n, e_k \rangle \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y_n, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \|x_n\| \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty. \end{aligned}$$

Veamos ahora que la suma no depende de la base ortonormal elegida:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle,$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle y_n, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, e_k \rangle e_k \rangle = \langle y_n, x_n \rangle,$$

tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle y_n, x_n \rangle.$$

Por lo tanto, la suma no depende de la base ortonormal elegida. ■



Ejemplo 2.2.6.2.6

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H .

Consideremos el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Como

$$s_n(T) = \frac{1}{n}$$

y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

Entonces $T \notin S_1(H)$.

Ejemplo 2.2.6.2.7

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H .

Consideremos el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Como

$$s_n(T) = \frac{1}{n^2},$$

y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

Entonces $T \in S_1(H)$.

Ejemplo 2.2.6.2.8

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por



$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(K) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Luego, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} = \infty,$$

entonces $K \notin S_1(H)$.

Por otro lado, usando la definición 2.2.6.2.4, es sencillo demostrar las siguientes propiedades de la traza usual:

1. $Tr(\alpha T + \beta R) = \alpha Tr(T) + \beta Tr(R)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $T, R \in S_1$. Esto se sigue directamente de la definición.
2. $Tr(T^*) = \overline{Tr(T)}$ para $T \in S_1(H)$. En efecto, esto se sigue de las siguientes igualdades

$$Tr(T^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T^* e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, T e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle T e_k, e_k \rangle} = \overline{Tr(T)}.$$

3. Como los operadores unitarios llevan bases ortonormales en bases ortonormales, entonces es claro que el funcional traza usual es unitariamente invariante.

Los tres numerales anteriores demuestran el siguiente corolario:

Corolario 2.2.6.2.9: El funcional Tr es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.

Para establecer más ejemplos de operadores nucleares, el teorema de Mercer es un ingrediente importante.



El teorema de Mercer se ubica en el contexto de operadores integrales positivos, su prueba puede ser I. Gohberg S. Goldberg and M. Kaashoek (2003), pag. 197 y afirma que:

Teorema 2.2.6.2.10 (Mercer)

Sea k una función continua en $[a, b] \times [a, b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds ;$$

entonces

$$k(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) x_k(t) \overline{x_k(s)}, \dots \dots \dots (2.3)$$

donde (x_n) es la sucesión de autovectores de A dadas por (1). Además, la serie de arriba converge absoluta y uniformemente en $[a, b] \times [a, b]$.

El teorema de Mercer nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.2.6.2.11: Sea k una función continua en $[a, b] \times [a, b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds ;$$

entonces A es nuclear y



$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)$$

Demostración:

Tomando $t = s$ en (2) tenemos que

$$k(t, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) |x_k(t)|^2,$$

e integrando esta última expresión llegamos a

$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) \|x_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

Como para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que $\langle Af, f \rangle \geq 0$, entonces A es un operador positivo, luego $\lambda_k(A) = s_k(A)$. Por lo tanto,

$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)$$

lo que nos dice que A es nuclear. ■

El teorema de Lidskii expresa la traza usual de un operador nuclear como la suma de sus autovalores tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas; por esta razón, algunos autores se refieren a la traza usual como una traza espectral, su prueba puede encontrarse en diferentes referencias como son I. Gohberg S. Goldberg and M. Kaashoek (2003), J.R. Retherford (1993). El enunciado es el siguiente:

Teorema 2.2.6.2.12 (Lidskii)

Si $T \in S_1(H)$, entonces

$$Tr(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(T),$$



donde, $(\lambda_k(T))$ es la sucesión de valores propios de T ordenados de tal forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

Observación 2.2.6.2.13

Por el teorema de Lidskii y el lema de Weyl, la traza usual es continua (acotada) con la norma $\| \cdot \|_1$, mas precisamente se cumple

$$|Tr(T)| \leq \| T \|_1, \forall T \in S_1(H).$$

Ejemplo 2.2.6.2.14

Por el corolario 2.2.6.2.11, si k una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ y para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds ;$$

entonces A es nuclear y

$$\int_a^b k(t, t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = Tr(A).$$

La expresión anterior es llamada la fórmula de la traza y expresa la traza usual del operador A en función de su núcleo, es decir, no depende de los autovalores de A .

Ejemplo 2.2.6.2.15

Sea g una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ con valores complejos. Sea

$$k(t, s) = \int_a^b g(x)g(x, s)dx.$$

La función k satisface las hipótesis del teorema de Mercer. Por lo tanto,



$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

Por el teorema de Lidskii, tenemos que

$$\text{Tr}(A) = \int_a^b k(t, t) dt = \int_a^b \int_a^b |g(s, t)|^2 ds dt.$$

2.2.6.3 Trazas de Dixmier

Definición 2.2.6.3.1: Una traza φ sobre un ideal bilatero de operadores J es llamada singular si $\varphi(F) = 0, \forall F \in F(H)$.

La traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular y no es una extensión de la traza de operadores de rango finito, a diferencia de la traza usual. Para su construcción es necesario garantizar la existencia de límites generalizados o estados singulares con ciertas propiedades de invariancia y dilatación. A continuación, presentamos la construcción de la traza de Dixmier asociado a un estado.

Durante toda esta sección, P^∞ denotará el espacio de sucesiones complejas acotadas y C_0 el subespacio de sucesiones convergentes a cero.

Por Carey y Sukochev (2006) existe un estado ω en P^∞ (un funcional lineal positivo en P^∞ tal que $\omega(1, 1, 1, 1, \dots) = 1$) con la siguiente propiedad: para cada $n \geq 1$ se tiene

$$\omega \circ D_n = \omega \circ T = \omega \circ H = \omega,$$

donde

$$T: P^\infty \rightarrow P^\infty, T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

$$H: P^\infty \rightarrow P^\infty, H(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dots \right)$$

$$D_n: P^\infty \rightarrow P^\infty, D_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{n\text{-veces}}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{n\text{-veces}}, \dots)$$



Observación 2.2.6.3.2:

Si un estado ω en P^∞ es invariante por T , entonces $\omega(a) = 0$ para todo $a \in CN$, donde CN denota el espacio de sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos. Además, como CN es denso en C_0 , por continuidad tenemos que $\omega(a) = 0$ para todo $a \in C_0$. De esta forma, hemos conseguido estados que se anulan en C_0 . Estados con esta propiedad, son llamados estados singulares.

Por la observación anterior, hemos conseguido estados singulares invariantes por el operador D_2 , veamos la construcción de la traza de Dixmier.

Consideremos el siguiente espacio:

$$M_{1,\infty}(H) = \{T \in K(H) / \|T\|_{1,\infty} = \sup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \right\} < \infty\}$$

Usando la proposición 2.2.5.17 se prueba que $M_{1,\infty}(H)$ es un ideal bilátero del algebra $f(H)$.

Sea ω un estado singular en P^∞ invariante por el operador D_2 (su existencia esta garantizada en la observación 2.2.6.3.2), sobre

$$M^+_{1,\infty}(H) = \{T \in M_{1,\infty}(H), T \text{ es positivo}\}$$

definimos el funcional Tr_ω por

$$Tr_\omega(T) := \omega\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T)\right).$$

Como $s_k(U^*TU) = s_k(T)$ para todo $U \in f(H)$ unitario, entonces Tr_ω es unitariamente invariante, solo faltaría probar la linealidad. Veamos esto:

Sean

$$T_1, T_2 \in M^+_{1,\infty}(H), \quad \alpha = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_1), \quad \beta = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_2),$$
$$\gamma_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_1 + T_2).$$

Por la proposición 2.2.5.17 se tiene que



$$\gamma_n \leq \alpha_n + \beta_n,$$

lo cual implica que

$$Tr_\omega(T_1 + T_2) \leq Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2).$$

Por A. Alberverio, D. Guido, A. Ponosov and S. Scarlatti (1996), para operadores positivos se cumple que

$$\sum_{k=1}^n s_k(T_1) + \sum_{k=1}^n s_k(T_2) \leq \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2).$$

La desigualdad anterior implica que

$$\alpha_n + \beta_n \leq \frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n},$$

y como

$$\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n} - \gamma_{2n} \right) \in C_0,$$

entonces

$$\omega((\gamma_{2n})) = \omega\left(\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n}\right)\right).$$

Veamos ahora que

$$\omega((\gamma_{2n})) = \omega((\gamma_n)).$$

En efecto, como ω es invariante por D_2 , la igualdad anterior es equivalente a que

$$\omega(\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) = \omega((\gamma_n)).$$

Como ω es un estado singular, basta verificar que

$$(\gamma_n) - (\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) \in C_0.$$

Restando lo anterior tenemos

$$(\gamma_1 - \gamma_2, 0, \gamma_3 - \gamma_4, 0, \gamma_5 - \gamma_6, 0, \dots),$$

luego vemos que esta última sucesión converge a cero.

Para esto, basta verificar que



$$(\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n}) \in \mathcal{C}_0.$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2n-1} - \gamma_{2n} &= \frac{1}{\log(2n)} \sum_{k=1}^{2n-1} s_k(T_1 + T_2) - \frac{1}{\log(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2) \\ &= \frac{\log(1 + \frac{1}{2n})}{\log(2n+1)} \gamma_{2n-1} - \frac{s_{\frac{2n+1}{2}}(T_1 + T_2)}{\log(2n+1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tomamos ω y concluimos que

$$Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2) \leq Tr_\omega(T_1 + T_2),$$

Concluimos entonces que Tr_ω es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}^+(H)$.

Definición 2.2.6.3.3. La traza de Dixmier de un operador autoadjunto $T \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(T) := Tr_\omega(T_+) - Tr_\omega(T_-)$$

donde $T_+ = \frac{1}{2}(T + |T|)$ y $T_- = -\frac{1}{2}(T - |T|)$ son operadores positivos llamados la parte positiva y negativa de T respectivamente, donde $|T|$ denota la raíz cuadrada de operador T^*T .

La traza de Dixmier de un operador arbitrario $T \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(T) := Tr_\omega(Re(T)) + i Tr_\omega(Im(T))$$

donde $Re(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $Im(T) = \frac{-i}{2}(T - T^*)$ son operadores autoadjuntos llamados la parte real e imaginaria de T respectivamente.

El siguiente teorema demuestra que la traza de Dixmier, en efecto, es una traza singular continua sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.

Teorema 2.2.6.3.4

- 1) Tr_ω es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.
- 2) $Tr_\omega(T) = 0, \forall T \in S_1(H)$.
- 3) Tr_ω es una funcional lineal continuo con la norma $\|\cdot\|_{1,\infty}$, más precisamente,

$$|Tr_\omega(T)| \leq \|T\|_{1,\infty} \forall T \in M_{1,\infty}(H).$$



Demostración:

1) Todo $T \in M_{1,\infty}(H)$ puede escribirse como $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$, donde $T_1=(\operatorname{Re}(T))_+$, $T_2=(\operatorname{Re}(T))_-$, $T_3=(\operatorname{Im}(T))_+$, $T_4=(\operatorname{Im}(T))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. Como Tr_ω es aditivo en $M_{1,\infty}(H)$, entonces Tr_ω se extiende por linealidad a un funcional lineal en todo $M_{1,\infty}(H)$. Que el funcional lineal Tr_ω sea unitariamente invariante se sigue del hecho que $s_n(U^*TU) = s_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $U \in f(H)$ operador unitario.

2) Como $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$, donde $T_1=(\operatorname{Re}(T))_+$, $T_2=(\operatorname{Re}(T))_-$, $T_3=(\operatorname{Im}(T))_+$, $T_4=(\operatorname{Im}(T))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. Basta verificar que si $T \in S_1(H)$ es un operador positivo entonces $\operatorname{Tr}_\omega(T) = 0$.

En efecto, como $T \in S_1(H)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty,$$

luego

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \leq \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T).$$

Tomando límite a la anterior desigualdad, concluimos que

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \rightarrow 0,$$

y como ω es un estado singular, entonces $\operatorname{Tr}_\omega(T) = 0$.

3) Puede verificarse que el estado ω es acotado y $\|\omega\| = 1$, por lo tanto

$$|\operatorname{Tr}_\omega(T)| \leq \|T\|_{1,\infty}, \forall T \in M_{1,\infty}(H).$$

El cual permite establecer la desigualdad pedida para todo T en $M_{1,\infty}(H)$. ■

Definición 2.2.6.3.5. Un operador $T \in M_{1,\infty}(H)$ es llamado Dixmier medible si el número $\operatorname{Tr}_\omega(T)$ no depende del estado ω elegido.

Observación 2.2.6.3.6

Por el teorema anterior, tenemos que, en particular, Tr_ω se anula en el ideal de operadores de rango finito. Por lo tanto, la traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular.

Alain Connes sugiere otra forma de construir estados invariantes por el operador dilatación D_2 . Veamos esto:

Sea el operador

$$M: P^\infty \rightarrow P^\infty, M((x_n)) = \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n 1/k} \right).$$

Consideremos φ un estado singular, por A. Pietsch (2013) tenemos que

$$MD_2x - Mx \in C_0, \forall x \in P^\infty,$$

luego, por continuidad de φ tenemos que

$$\varphi MD_2 = \varphi M.$$

Tomando $w = \varphi M$ se tiene

$$wD_2 = w,$$

luego w es invariante por el operador dilatación D_2 .

La traza de Dixmier asociada a este estado es llamada traza de Connes-Dixmier. Por lo tanto, toda traza de Connes-Dixmier es traza de Dixmier, pero el recíproco no siempre es cierto. Por lo tanto, si denotamos por \mathcal{D} el conjunto de trazas de Dixmier y por \mathcal{C} el conjunto de trazas de Connes-Dixmier, entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Ejemplo 2.2.6.3.7

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H . Consideremos el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Luego



$$s_n(T) = \frac{1}{n}.$$

Claramente $T \in M_{1,\infty}(H)$ y

$$Tr_\omega(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2.$$

Por lo tanto, T es Dixmier medible.

Observación 2.2.6.3.8

Puede encontrarse en S. Lord, F. Sukochev and D. Zanin (2012) que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores y multiplicidades algebraicas del operador considerado. Mas precisamente, tenemos que:

Si $T \in M_{1,\infty}(H)$ entonces

$$Tr_\omega(T) = \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) \right).$$

Ejemplo 2.2.6.3.9

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(K) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Luego, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} = \infty,$$

entonces $K \in M_{1,\infty}(L^2[0,1])$.

Ahora supongamos que K tiene un autovalor λ con autovector no nulo f , entonces



$$Kf = \lambda f,$$

lo que implica

$$2i \int_0^t f(s) ds = \lambda f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$2if(t) = \lambda f'(t), f(0) = 0,$$

lo que implica que $f = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador K no tiene autovalores. Usando la observación 2.2.6.3.8 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\omega(K) &= \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(K) \right) \\ &= 0, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, K es Dixmier medible.

2.2.6.4 Aplicaciones de trazas

Como primera aplicación de la teoría de trazas, en particular la traza de Dixmier, tenemos el comportamiento asintótico de los autovalores de un operador. Veamos esto:

Por Lord, Sukochev y Zanin (2021), tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.6.4.1

Un operador positivo $T \in M_{1,\infty}(H)$ es Dixmier medible si y solo si el limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T),$$

existe.

Observación 2.2.6.4.2

Como consecuencia directa del teorema 2.2.6.4.2, podemos afirmar que si $T \in M_{1,\infty}(H)$ es un operador positivo Dixmier medible y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) = 1,$$



entonces las sucesiones $(\log(n+1))$ y $(\sum_{k=1}^n \lambda_k(T))$ son asintóticamente equivalentes.

Por otra parte, si $T \in M_{1,\infty}(H)$ es un operador positivo Dixmier medible y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) = 0,$$

Entonces la sucesión $(\log(n+1))$ crece más rápidamente que la sucesión $(\sum_{k=1}^n \lambda_k(T))$.

Como segunda aplicación de la teoría de trazas podemos comentar lo siguiente:

Basados en el trabajo de Marchenko, H. Aden y Carl, B. (1996) inventaron el método del operador o método de traza para encontrar soluciones para la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv):

$$v_t = v_{xxx} + 3v_x^2$$

La principal idea de este método consiste en:

Dada una ecuación diferencial parcial no lineal y una solución escalar específica, el primer paso para encontrar otras soluciones es trasladar la ecuación no lineal dada, a una ecuación de operadores con su respectiva solución. Habiendo obtenido esta solución, el segundo paso es transferirla a una solución escalar usando un funcional adecuado (una traza). Este método fue usado por diferentes autores a otras ecuaciones diferenciales no lineales como la Kdv modificada, Sine-Gordon y la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP).

CONCEPTUAL

La construcción de la traza usual puede realizarse a partir del método de subálgebras sumergidas con la propiedad de aproximación (Gohberg, Goldberg & Krupnik, 2000). La traza de operadores de rango finito permitirá,

usando un teorema de extensión, construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares.

Otras trazas podrán construirse usando límites generalizados invariantes por dilatación, como son, la traza de Dixmier y Connes-Dixmier (Connes, 1990).

Aplicaciones de trazas pueden ser realizadas al cálculo de solución de ciertas ecuaciones diferenciales, usando sus propiedades de linealidad y su nulidad en los conmutadores.

2.3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

Espacios de Hilbert (Gohberg, Goldberg & Kaashoek, 2003)

Consideremos un espacio un espacio vectorial $(H; +; K; \cdot)$ Donde K es \mathbb{R} o \mathbb{C} . Un producto interno es una aplicación:

$$\langle \cdot ; \cdot \rangle : H \times H \rightarrow K$$

tal que se cumple:

- Definida positiva $\langle x; x \rangle \geq 0 \forall x \in E$ A $\langle x; x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Lineal en la primera variable: $\langle \alpha x + \beta y; z \rangle = \alpha \langle x; z \rangle + \beta \langle y; z \rangle \forall x, y, z \in E$ A $\alpha, \beta \in K$
- Es hermítica $\langle x; y \rangle = \overline{\langle y; x \rangle} \forall x, y \in E$

El par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en H es llamado espacio prehilbert y si la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ es completa, entonces el par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamado un espacio de Hilbert.

Operadores lineales y acotados en Espacios de Hilbert (Gohberg, Goldberg & Kaashoek, 2003)

Sea $(X; \| \cdot \|_X)$ y $(Y; \| \cdot \|_Y)$ dos espacios normados y una aplicación $T: X \rightarrow Y$ que satisface:

- $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall x; y \in X$



- $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in X \quad \wedge \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$

“ T ” así definido se llama operador lineal.

Sea $(X; \|\cdot\|_X)$ y $(Y; \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X$, para algun $M > 0$, “ T ” es llamado operador lineal acotado. Además, Si $X = Y$ el espacio $L(X)$ representará el espacio de operadores lineales y acotados en X .

Operadores Compactos (Retherford, 1993)

Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$, T es llamado compacto si para toda sucesión acotada (a_n) en H , $(T(a_n))$ tiene una subsucesion convergente en H . El espacio de operadores compactos en H es denotado por $K(H)$ y define un ideal del algebra de operadores lineales y acotados $L(H)$.

Sucesión de números singulares (Retherford, 1993)

La sucesión de números singulares de un operador compacto T definido sobre un espacio de Hilbert H , es una sucesión de decreciente de números no negativos $(s_n(T))$, donde $s_n(T) = (T^*T)^{1/2}$.

Ideal de Operadores (Lord, Sukochev & Zanin, 2012)

Sea $L(H)$ denota el espacio de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert H . Un ideal J de operadores de $L(H)$ es un subespacio vectorial tal que si $A \in L(H)$ y $T \in J$, entonces $AT, TA \in J$.

Funcional Traza (Lord, Sukochev & Zanin, 2012)

Una traza τ sobre un ideal de operadores J es un funcional lineal tal que $\tau(AT) = \tau(TA), \forall T \in J, \forall A \in L(H)$.



Traza Singular (Lord, Sukochev & Zanin, 2012)

Una traza τ sobre un ideal de operadores J es llamada singular si $\tau(F) = 0$, $\forall F$ operador de rango finito, es decir, para todo operador cuya dimensión de su imagen es finita.

CAPÍTULO III. HIPOTESIS Y VARIABLES

3.1. HIPÓTESIS

Hipótesis general.

El funcional traza definido sobre el espacio de operadores de rango finito y los límites generalizados permitirán construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares así como la traza de Dixmier y Connes-Dixmier.

Hipótesis específica.

La propiedad de singularidad de la traza de Dixmier permitirá demostrar que este funcional no es una extensión de la traza usual.

Propiedades de un funcional traza permitirá aplicar la teoría de trazas al cálculo de la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

3.2. DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE VARIABLES

Variable dependiente

Traza de operador sobre espacio de Hilbert.

Variable independiente

Operador lineal sobre un espacio de Hilbert

3.3. OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Dependiente Traza de operador sobre espacio de Hilbert	Traza Usual Traza de Dixmier Traza de Connes-Dixmier	- Traza definida sobre el ideal de operadores nucleares - Traza definida sobre el ideal de operadores de Lorentz - Traza de Dixmier escogiendo otro estado.	- $Tr(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle T e_n, e_n \rangle$ - $Tr(T) = w\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n S_k(T)\right)$ - $Tr(T) = w\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n S_k(T)\right)$	Deductivo	Analítica
Independiente Operador lineal sobre un espacio de Hilbert	Operador lineal acotado	La norma del operador es finita	$\ T\ < \infty$	Deductivo	Analítica

CAPITULO IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 TIPO Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto está enmarcado en el tipo de investigación básica. A esta investigación le corresponde el código UNESCO 120201 y el código del plan nacional CTI 04050102.

El diseño de la investigación a desarrollar será no experimental y consiste en, inicialmente, estudiar los ideales de operadores de rango finito, clase traza o nucleares y el ideal de operadores de Lorentz. Luego, se pretender definir los funcionales traza usual y traza de Dixmier. El trabajo termina con una aplicación de la teoría de trazas en la solución de la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv).

4.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

Dada la naturaleza de la investigación no corresponde determinar población y muestra porque no se realizará un tratamiento estadístico de datos.

4.4 LUGAR DE ESTUDIO Y PERIODO DESARROLLADO

El lugar de estudio del presente trabajo es en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao-Trabajo Remoto.

4.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

La técnica a usarse en este trabajo de investigación es la inductiva pues pasamos de un caso particular (caso matricial) a un caso general (caso de operadores).

La representación de operadores de rango finito en espacios de Hilbert como combinación lineal de operadores de rango uno, nos llevara a definir la traza sobre el ideal de operadores de rango finito. Esto será de utilidad para construir la traza usual sobre el espacio de operadores nucleares.

El teorema espectral para operadores compactos nos introducirá la sucesión de números singulares de un operador compacto. Esta sucesión aparece de tanto en la traza usual como en las trazas de Dixmier y Connes-Dixmier.

La teoría de límites generalizados es usada para la construcción de algunas trazas singulares como la traza de Dixmier. Esta teoría se basa en la forma analítica del teorema de extensión de Hahn Banach.

Para ejemplificar el cálculo de ciertas trazas de Dixmier, estudiamos la teoría de operadores Volterra (Gohberg & Krein, 1970).

Los instrumentos que se usarán para la recolección de la información necesaria serán, lápiz, papel, artículos científicos, textos especializados y un laptop personal.

4.6. ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE DATOS

Con el estudio de la traza para operadores de rango finito se determina la traza usual sobre el ideal de operadores de clase traza o nucleares en espacios de Hilbert. Luego, se estudia varias propiedades de la traza usual.

A continuación, usando el teorema de extensión de Hahn Banach, se construyen límites generalizados invariantes por dilatación. Esto determinará la traza de Dixmier y Connes Dixmier sobre el ideal de operadores de Lorentz.

Finalmente, basados en los resultados de Aden y Carl mostraremos algunas aplicaciones de la teoría de trazas para hallar soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.



CAPÍTULO V. RESULTADOS

5.1 RESULTADOS DESCRIPTIVOS

1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 tenemos que los ideales $K(H)$ y $F(H)$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $f(H)$.

2) Por el teorema 2.2.4.8, el teorema de Bolzano- Weierstrass puede extenderse a todo espacio normado de dimensión finita.

3) Por el teorema 2.2.5.1, todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma.

4) El teorema para operadores compactos autoadjuntos afirma que; Sea $T \in f(H)$ un operador compacto autoadjunto, entonces existe un sistema ortonormal $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ de autovectores de T con autovalores correspondientes: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tal que para cada $x \in H$, se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \langle x; x_n \rangle x_n.$$

Si la sucesión $(\lambda_n(T))$ es infinita, entonces: $\lambda_n(T) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

5) En general, si el operador T es compacto se tiene el teorema espectral para operadores compactos el cual afirma que:

Sea $T \in f(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n \geq 1} \subset H_1$; $(y_n)_{n \geq 1} \subset H_2$ tal que para cada $x \in H_1$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n.$$

Además, se tiene que $s_n(T) \rightarrow 0$ si $(s_n(T))$ es infinito.

6) Por el corolario corolario 2.2.5.6, todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito.



7) Por el corolario 2.2.5.8, si

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n$$

es la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; y_n \rangle x_n.$$

8) Por el teorema 2.2.5.10, otra forma de expresar los números singulares de un operador compacto es la siguiente:

$$s_n(T) = \min_{\dim M=n-1} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp M}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Luego

$$s_1(T) = \|T\|.$$

9) El corolario 2.2.5.12 afirma que si A y B son operadores compactos, entonces:

$$|s_n(A) - s_n(B)| \leq \|A - B\|; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto nos conduce a afirmar que si $A_n \rightarrow A$ entonces $s_k(A_n) \rightarrow s_k(A)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

10) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n}$

11) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H , entonces el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n^2}$



12) Por el ejemplo 2.2.5.16, el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definido por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

satisface

$$s_n(T) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

13) Por el teorema 2.2.6.2.2, la aplicación

$$\| \cdot \|_1: S_1(H) \rightarrow \mathbb{R}_0^+, A \mapsto \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)$$

define una norma en $S_1(H)$.

14) Por el teorema 2.2.6.2.3, el par $(S_1(H), \| \cdot \|_1)$ es un espacio de Banach

15) Por el teorema 2.2.6.2.5, si $T \in S_1(H)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle$$

converge absolutamente para cualquier base ortonormal (e_k) de H y su suma es independiente de la elección de la base.

16) El corolario 2.2.6.2.9, nos permite afirmar que el funcional Tr es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.

17) Con el ejemplo 2.2.6.2.15 y el teorema de Mercer, si g una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ con valores complejos. Sea

$$k(t, s) = \int_a^b g(x) g(x, s) dx.$$

La función k satisface las hipótesis del teorema de Mercer. Por lo tanto,



$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

Por el teorema de Lidskii, tenemos que

$$Tr(A) = \int_a^b k(t, t) dt = \int_a^b \int_a^b |g(s, t)|^2 ds dt.$$

18) El teorema 2.2.6.3.4 nos dice que Tr_{ω} es una traza singular acotada sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.

19) El ejemplo 2.2.6.3.7 establece que si (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H . Entonces el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

cumple

$$s_n(T) = \frac{1}{n}.$$

y claramente $T \in M_{1,\infty}(H)$ y

$$Tr_{\omega}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2.$$

Por lo tanto, T es Dixmier medible.

20) El ejemplo 2.2.6.3.9 establece que el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definido por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

satisface

$$s_n(K) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Luego, como



$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} = \infty,$$

entonces $K \in M_{1,\infty}(L^2[0,1])$.

Por otra parte, si suponemos que K tiene un autovalor λ con autovector no nulo f , entonces

$$Kf = \lambda f,$$

lo que implica

$$2i \int_0^t f(s) ds = \lambda f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$2if(t) = \lambda f'(t), f(0) = 0,$$

lo que implica que $f = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador K no tiene autovalores. Usando el corolario 2.2.6.3.9 tenemos que

$$\begin{aligned} Tr_{\omega}(K) &= \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(K) \right) \\ &= 0, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, K es Dixmier medible.

21) El teorema 2.2.6.4.1 establece la caracterización de un operador positivo Dixmier medible, más precisamente, afirma que:

Un operador positivo $T \in M_{1,\infty}(H)$ es Dixmier medible si y solo si el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T),$$

existe.



5.2 RESULTADOS INFERENCIALES

1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 tenemos que los ideales $K(H)$ y $F(H)$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $f(H)$, mas aun, tienen estructura de ideales bilateros del algebra $f(H)$.

2) Por el teorema 2.2.5.1, todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma. Sin embargo, existen operadores compactos no autoadjuntos que no tienen autovalores, estos operadores son llamados Volterra.

3) Por el corolario 2.2.5.8, si

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n$$

es la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; y_n \rangle x_n.$$

Por lo tanto, podemos inferir que $s_n(T) = s_n(T^*)$.

4) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n}$ De esto podemos inferir que T no es nuclear.

5) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H , entonces el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n^2}$ De esto podemos inferir que T es nuclear.

6) Por la observación 2.2.6.2.13, se puede inferir que el funcional Tr es acotada con la norma $\|\cdot\|_1$.



7) Usando la observación 2.2.6.3.8 tenemos que para todo $T \in M_{1,\infty}(H)$ se cumple

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\omega(T) &= \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) \right) \\ &= 0, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la traza de Dixmier de todo operador en $M_{1,\infty}(H)$ depende de sus autovalores y multiplicidades algebraicas.

5.3 OTRO TIPO DE RESULTADOS DE ACUERDO A LA NATURALEZA DEL PROBLEMA Y LA HIPÓTESIS

Ninguno.

CAPÍTULO VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 CONTRASTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON LOS RESULTADOS.

Con respecto a lo hecho en esta investigación tenemos la definición de la traza usual y la traza de Dixmier asociada a un estado singular invariante por dilatación. La traza usual de un operador nuclear T se define por

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n; \varphi_n \rangle,$$

Por el teorema 2.2.6.2.5 esta suma no depende de la base ortonormal elegida y por lo tanto este funcional está bien definido. Hemos visto que este funcional es lineal e unitariamente invariante lo que nos lleva a inferir que es una traza sobre el ideal de operadores nucleares. Por otra parte, por la observación 2.2.6.2.13, la traza usual es acotada con la norma $\|\cdot\|_1$. Finalmente, por el teorema de Lidskii, la traza usual puede expresarse como la suma

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T),$$

lo que nos dice que la traza usual es espectral.

Respecto a la traza de Dixmier, hemos visto su construcción usando límites generalizadas invariantes por dilatación. Por el teorema 2.2.6.3.4, la traza de Dixmier es un funcional lineal unitariamente invariante, y por lo tanto es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$. El mismo teorema nos permite afirmar que la traza de Dixmier es singular y acotada con la norma $\|\cdot\|_{1,\infty}$. Finalmente, si consideramos la observación 2.2.6.3.8 se puede inferir que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores del operador considerado y sus multiplicidades algebraicas.

6.2 CONTRASTACIÓN DE LOS RESULTADOS CON OTROS ESTUDIOS SIMILARES.

En A. Pietsch (2013) se estudia de manera exhaustiva las trazas de Dixmier y Connes-Dixmier. En este artículo se estudia el conjunto de trazas de Dixmier y el conjunto de trazas de Connes-Dixmier; se compara ambos conjuntos y se demuestra que existen trazas de Dixmier que no es de Connes.Dixmier.

En A. Albeverio (1996) se construyen otras trazas singulares diferentes de la traza de Dixmier. Es en este artículo que se introducen los operadores excéntricos generalizados.

6.3 RESPONSABILIDAD ÉTICA

NINGUNA

CONCLUSIONES

1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 podemos concluir que $K(H)$ y $F(H)$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $f(H)$.

2) Por el teorema 2.2.4.8, se puede concluir que el teorema de Bolzano-Weierstrass admite extensión a todo espacio normado de dimensión finita.

3) Por el teorema 2.2.5.1, concluimos que todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma. Sin embargo, existe operadores compactos no autoadjuntos sin autovalores.

4) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n}$ Esto nos conlleva a concluir que T no es nuclear.

5) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H , entonces el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n^2}$ Esto nos conlleva a concluir que T es nuclear.

6) Por el ejemplo 2.2.5.16, el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definido por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

satisface

$$s_n(T) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Esto nos lleva a concluir que T no es nuclear. Por otra parte, si suponemos que K tiene un autovalor λ con autovector no nulo f , entonces

$$Kf = \lambda f,$$

lo que implica

$$2i \int_0^t f(s) ds = \lambda f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$2if(t) = \lambda f'(t), f(0) = 0,$$

lo que implica que $f = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador K no tiene autovalores.

7) Por la observación 2.2.6.3.8, se puede concluir que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores y multiplicidades algebraicas del operador considerado. Mas precisamente, tenemos que:

Si $T \in M_{1,\infty}(\mathbb{H})$ entonces

$$Tr_{\omega}(T) = \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) \right).$$

RECOMENDACIONES

El libro más completo que trata la teoría de trazas de operadores en espacios de Banach y Hilbert es I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik (2000), por lo cual es recomendable su lectura para el mejor entendimiento del trabajo. Por otra parte, la teoría de trazas singulares y sus aplicaciones ha sido estudiado de manera exhaustiva en los últimos veinte años, la referencia más completa de este tema es S. Lord , F. Sukochev and D. Zanin (2012), por lo cual se recomienda su lectura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aden, C. and Carl, B. (1996). On realizations of solutions of the KdV equation by determinants on operator ideals. *J. Math. Phys.* 37, 1833-1857.

Albeverio, A., Guido, D., Ponosov, A. and Scarlatti, S. (1996). Singular traces and compact operators. *J. Funct. Anal.* 137, 281-302.

Alcántara-Bode, J. (2002), Rearrangings of Series in Banach Spaces and some problems in number theory. *Pro Mahematica.* XVI, 98-105.

Ben-artzi, A. (1984). Traces of compact operators. *Integral Equations Operator Theory* 7, 310-324.

Brislaw, C. (1988). Kernels of trace class operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* 104, 1181-1190.

Douglas, R. G. (1966). On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert Spaces. *Proc Amer. Math. Soc.*, 17, 413-415.

Carey, A. L. and Sukochev, F. A. (2006). Dixmier Traces and some applications to noncommutative geometry. *Uspek hi mat. Nauk*, 61(6(372)):45-110.

Connes, A. (1990). *Geometrie non commutative*. Paris: Interditions.

Dixmier, J. (1966). Existences de traces non normales, C.R. Acad. Sci. Paris 262.

Enflo, P. (1973). A counterexample to the approximation property in Banach spaces. *Acta Math.* 130, 309-317.



Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016). The Lidskii trace property and the nest approximation property in Banach Spaces, *J. Funct. Anal.* 271, no.3, 566-576.

Fuhrmann, P.A. (1981). *Linear Systems and Operators in Hilbert Space*. Beer Sheva: McGraw-Hill.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000). *Traces and determinants of linear operators, Operator Theory: Advances and Applications*. Basel: Birkhauser Verlag.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003). *Basic Classes of Linear Operators*. Basel: Birkhauser.

Gohberg, I. and Krein, M. G. (1985). *Introduction to the Theory of Non-selfadjoint Operators*. Moscow: Translations of Mathematical Monographs.

Gohberg, I. and Krein, M. G. (1970). *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert Space*. Moscow: Translations of Mathematical Monographs.

Guido, D. and Isola, T. (2002). On the Domain of Singular Traces. *J. Funct. Anal.* 13, 667-674.

Johnson, W.B. and Szankowski, A. (2014). The trace formula in Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics* 203, 1-16.

Jorgens, K. and Roach, G.F. (1982). *Linear Integral Operators*. Boston: Pitman Advanced Publishing Program.



Kwapień, S. (1972). Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector coefficients. *Studia Math.* 44, 583-595.

Pietsch, A. (1987). *Eigenvalues and s-Numbers*, Geest & Portig. Leipzig: Cambridge Univ. Press.

Pietsch, A. (2013). Connes-Dixmier versus Dixmier traces. *Integral Equations Operator Theory* 77(2), 243-259.

Pisier, G. (1988). Weak Hilbert spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society* 56, 547-579.

Retherford, J. R. (1993). *Hilbert Space: Compact Operator and the Trace Theorem*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012). *Singular Traces, Theory and Applications*. Berlin: De Gruyter.

Varga, J.V. (1989). Traces on irregular ideals. *Proc. Amer. Math. Soc.* 107, 715.

ANEXOS

ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA: TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
<p>Problema General</p> <p>¿Qué otras trazas de operadores en espacios de Hilbert podemos definir?</p> <p>Problemas Específicos</p> <p>1. ¿Toda traza es una extensión de la traza usual?</p> <p>2. ¿Qué aplicaciones de los funcionales trazas existen?</p>	<p>Objetivo General</p> <p>Construir la traza usual, traza de Dixmier, Connes-Dixmier de operadores en espacios de Hilbert.</p> <p>Objetivos Especificas</p> <p>1. Mostrar que existen trazas que no son extensiones de la traza usual.</p> <p>2. Mostrar las aplicaciones de los funcionales traza para hallar la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.</p>	<p>Hipótesis General</p> <p>El funcional traza definido sobre el espacio de operadores de rango finito y los límites generalizados permitirán construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares así como la traza de Dixmier y Connes-Dixmier.</p> <p>Hipótesis Especifica</p> <p>1. La propiedad de singularidad de la traza de Dixmier permitirá demostrar que este funcional no es una extensión de la traza usual.</p> <p>2. Propiedades de un funcional traza permitirá aplicar la teoría de trazas al cálculo de la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.</p>	<p>Variable dependiente</p> <p>Traza de operador sobre espacio de Hilbert.</p> <p>Variable independiente</p> <p>Operador lineal sobre un espacio de Hilbert</p>	<p>Método de investigación</p> <p>El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.</p> <p>Tipo de Investigación</p> <p>Investigación básica.</p> <p>Diseño de la investigación</p> <p>será teórico y consiste en, inicialmente, estudiar los ideales de operadores de rango finito, clase traza o nucleares y el ideal de operadores de Lorentz. Luego, se pretender definir los funcionales traza usual y traza de Dixmier. El trabajo termina con una aplicación de la teoría de trazas en la solución de la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv).</p>

Trazas de Operadores en Espacios de Hilbert

Alfredo Sotelo Pejerrey

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Universidad Nacional del Callao

1. RESUMEN

La presente investigación estudia diversos funcionales sobre espacios de Hilbert llamados trazas. Se estudia la traza de operadores de rango finito, la traza usual y la traza de Dixmier. Algunas aplicaciones de estos funcionales son mencionadas.

Palabras claves: Operador compacto, traza de Dixmier, espacio de Hilbert.

2. ABSTRACT

This research studies several functional on Hilbert spaces called traces. It is studied the trace of finite rank operators, the usual trace and the Dixmier trace. Some applications of these functional are mentioned.

KeyWords: Compact operator, Dixmier trace, Hilbert space.

3. INTRODUCCIÓN

La traza de una matriz cuadrada se define como la suma de elementos de su diagonal o equivalentemente como la suma de sus valores propios. Este funcional es lineal y se anula en los conmutadores, es decir, $tr(AB) = tr(BA)$. En el contexto de operadores en espacios de Banach y Hilbert, un problema no trivial es determinar una clase de operadores donde se pueda definir un funcional traza, es decir, un funcional lineal que se anula en los conmutadores; este problema es difícil pues la suma de valores propios de un operador podría diverger.

El presente trabajo de investigación está centrado en el estudio de funcionales trazas sobre ciertos ideales de operadores. Inicialmente estudiamos la traza de operadores de rango finito y la traza usual definida sobre el ideal de operadores nucleares.

El primer ejemplo de traza singular fue dado por Jacques Dixmier en su artículo de 1966 (J. Dixmier, 1966). Una traza singular es un funcional traza que se anula en el ideal de operadores de rango finito, es por ello que no es una extensión de la traza matricial usual. Este trabajo de investigación presenta una forma alternativa de la construcción de la traza de Dixmier y escogiendo un estado

adecuado se construye la traza de Connes-Dixmier; todo esto es importante ya que sus aplicaciones se ven reflejadas en el libro de Alain Connes titulado geometría noconmutativa (A. Connes (1990)).

4. PRELIMINARES

Para establecer los resultados principales de este trabajo, es necesario los siguientes teoremas y corolarios:

El siguiente teorema puede encontrarse en I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik (2000).

Teorema 4.1: (Espectral para operadores compactos)

Sea $T \in f(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n \geq 1} \subset H_1; (y_n)_{n \geq 1} \subset H_2$ tal que para cada $x \in H_1$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n \dots \dots \dots (4.1)$$

Además, se tiene que $s_n(T) \rightarrow 0$ si $(s_n(T))$ es infinito.

Observación 4.2. $s_n(T)$ es llamado el n – esimo numero singular de T . La representación (4.1) es llamada la representación Hilbert – Schmidt de T .

El siguiente corolario, muestra que todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito. Mas precisamente, se tiene el siguiente teorema:

Corolario 4.3: $\overline{FH} = K(H)$.

Demostración:

Sea $T \in K(H)$ entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n \geq 1} \subset H; (y_n)_{n \geq 1} \subset H$ tal que para cada $x \in H$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n, s_n(T) \rightarrow 0 \text{ si } (s_n(T)) \text{ es infinito.}$$

Si definimos

$$T_n = \sum_{k=1}^n s_k(T) \langle \cdot; x_k \rangle y_k \in F(H),$$

entonces $T_n \rightarrow T$, por lo tanto $T \in \overline{FH}$. ■

De forma similar al corolario anterior, puede demostrarse el siguiente corolario:

Corolario 4.4: Sea el operador lineal B definido en un espacio de Hilbert H por

$$Bx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x; x_n \rangle y_n$$

donde $(x_n), (y_n)$ son sistemas ortonormales y $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de números no negativos que converge a cero, entonces B es compacto y $a_n = s_n(T)$.

El siguiente corolario, calcula la adjunta de un operador compacto, vía la representación Hilbert-Schmidt.

Corolario 4.5: Sea

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n$$

la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; y_n \rangle x_n.$$

Demostración:

Por linealidad y continuidad, basta demostrar que

$$(\langle \cdot; x_n \rangle y_n)^* = (\langle \cdot; y_n \rangle x_n)^*.$$

Sea

$$R = \langle \cdot; x_n \rangle y_n \Rightarrow R.$$

Entonces

$$x = \langle x; x_n \rangle y_n.$$

Luego

$$\langle Rx; y \rangle = \langle \langle x; x_n \rangle y_n; y \rangle = \langle x; x_n \rangle \langle y_n; y \rangle = \langle x; \langle y; y_n \rangle x_n \rangle$$

por lo tanto,

$$R^*y = \langle y; y_n \rangle x_n.$$

Es así que

$$R^* = \langle \cdot; y_n \rangle x_n.$$



Observación 4.6

Como

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; y_n \rangle x_n,$$

Entonces por el corolario 4.5 y 4.4 tenemos que

$$s_n(T) = s_n(T^*).$$

El siguiente teorema puede encontrarse en I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik (2000) y demuestra otra representación de los números singulares.

Teorema 4.7

$$s_n(T) = \min_{\substack{\dim M=n-1 \\ x \perp M}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp M}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Luego

$$s_1(T) = \|T\|$$

Como consecuencia directa del teorema anterior, tenemos el corolario siguiente:

Corolario 4.8: Sea A un operador compacto y B un operador acotado

Entonces:

$$s_n(AB) \leq \|B\|s_n(A)$$

$$s_n(BA) \leq \|B\|s_n(A)$$

El siguiente corolario puede encontrarse en I. Gohberg, S. Goldberg and K. Krupnik (2000), pag. 52. y afirma que:

Corolario 4.9: Si A y B son operadores compactos, entonces:

$$|s_n(A) - s_n(B)| \leq \|A - B\|; \forall n \in \mathbb{N}$$

Observación 4.10

Por el corolario anterior, si $A_n \rightarrow A$ entonces $s_k(A_n) \rightarrow s_k(A)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Ejemplo 4.11

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H . Consideremos el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente el operador T es un operador lineal y acotado. Para cada n consideremos el operador

$$T_n x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Se cumple que

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

Como cada T_n es de rango finito entonces es compacto. Por el corolario 4.3 concluimos que T es compacto. Finalmente, por el corolario 4.4 tenemos que

$$s_n(T) = \frac{1}{n}.$$

Ejemplo 4.12

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H . Consideremos el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente el operador T es un operador lineal y acotado. Para cada n consideremos el operador

$$T_n x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Se cumple que

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

Como cada T_n es de rango finito entonces es compacto. Por el corolario 4.3 concluimos que T es compacto. Finalmente, por el corolario 4.4 tenemos que

$$s_n(T) = \frac{1}{n^2}.$$

Ejemplo 4.13

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(T) = \frac{4}{(2n - 1)\pi}.$$

Varias desigualdades de los números singulares son dados en la siguiente proposición:

Proposición 4.14

Para cada $n \geq 1$ se cumplen las siguientes desigualdades:

1. $\sum_{j=1}^n |\lambda_j(A)| \leq \sum_{j=1}^n s_j(A)$
2. $\prod_{j=1}^n |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^n s_j(A)$
3. $\sum_{j=1}^n |\lambda_j(A)|^p \leq \sum_{j=1}^n [s_j(A)]^p, p \geq 1.$
4. $\sum_{j=1}^n [s_j(A+B)]^p \leq \sum_{j=1}^n (s_j(A) + s_j(B))^p, p \geq 1.$
5. $\sum_{j=1}^n (s_j(AB))^p \leq \sum_{j=1}^n (s_j(A))^p (s_j(B))^p, p \geq 1.$
6. $\prod_{j=1}^n s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^n s_j(A) s_j(B)$

$$7. \sum_{j=1}^n (s_j(A+B))^p \leq \sum_{j=1}^n (s_j(A))^p + \sum_{j=1}^n (s_j(B))^p, \quad p \geq 1.$$

Un resultado de teoría espectral para operadores compactos integrales es el siguiente:

Teorema 4.15 (Mercer)

Sea k una función continua en $[a, b] \times [a, b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds;$$

entonces

$$k(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) x_k(t) \overline{x_k(s)},$$

donde (x_n) es la sucesión ortonormal de autovectores de A . Además, la serie de arriba converge absoluta y uniformemente en $[a, b] \times [a, b]$.

5. RESULTADOS

5.1 La traza de Operadores de Rango Finito

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Consideremos un operador de rango finito $F \in \mathcal{F}(H)$. Luego podemos considerar $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ una base para $Im(F)$. Es conocido que F puede representarse de la forma:

$$Fx = \sum_{j=1}^m g_j(x) \varphi_j, \quad (g_j) \subset X^*.$$

La traza de F está definida

$$tr(F) = \sum_{j=1}^m g_j(\varphi_j).$$

Esta traza, definida sobre el ideal de operadores de rango finito, es un funcional lineal y verifica

$$tr(AF) = tr(FA); \quad \forall F \in \mathcal{F}(X), \forall A \in f(X).$$

Por lo tanto, el funcional lineal tr es una traza sobre el ideal bilatero $\mathcal{F}(H)$. Además, el funcional tr es espectral, es decir, si $F \in \mathcal{F}(H)$ entonces

$$\text{tr}(F) = \sum_j \lambda_j,$$

donde (λ_j) son los valores propios no nulos de F .

5.2 La traza Usual

A continuación, vamos a definir el ideal de operadores nucleares.

En lo que sigue H denotará un espacio de Hilbert separable infinito dimensional.

Definición 5.2.1: Sea H un espacio de Hilbert separable y $T \in K(H)$. El operador T es llamado nuclear o de clase traza si

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty.$$

El espacio de operador nucleares es denotado por

$$S_1(H) = \{A \in f(H) : A \text{ es compacto y } \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty\}.$$

Usando la proposición 4.14 no es difícil demostrar que $S_1(H)$ es un ideal bilatero del espacio $f(H)$ de operadores lineales y acotados.

A continuación, definimos una norma en el espacio de operadores nucleares:

Teorema 5.2.2:

$$\| \cdot \|_1: S_1(H) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$A \mapsto \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \text{ es una norma}$$

Demostración:

1) Como los $s_j(A) \geq 0, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \geq 0$

Además

$$\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = 0 \Rightarrow s_1(A) = \|A\|_{f(H)} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

2) Sea $\alpha \in \mathbb{C}, A \in S_1(H)$, entonces

$$\|\alpha A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\alpha A) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j[(\alpha A)^*(\alpha A)]} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 \cdot \lambda_j[A^*A]}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha| \sqrt{\lambda_j[A^*A]} = |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = |\alpha| \cdot \|A\|_1$$

3) Usando la proposición 4.14, tenemos que tenemos que

$$\|A + B\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A + B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(B) = \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

Teorema 5.2.3: $(S_1(H), \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach.

Demostración:

Sea $(A_n)_{n \geq 1} \subset S_1(H)$ una sucesión de Cauchy, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad m, n \geq m_0 \Rightarrow \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon$$

Pero

$$\|A_m - A_n\|_{f(H)} = s_1(A_m - A_n) \leq \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon.$$

Luego $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $f(H)$ el cual es completo, entonces existe un operador $A \in f(H)$ tal que $\|A_m - A\|_{f(H)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, además como cada A_m es compacto, por el corolario 2.2.5.6, tenemos que A es compacto.

También

$$\sum_{j=1}^k s_j(A_n - A_m) \leq \|A_n - A_m\|_1 < \varepsilon,$$

y haciendo $m \rightarrow \infty$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^k s_j(A_n - A) \leq \varepsilon, \forall n > m_0 \Rightarrow \|A_n - A\|_1 \leq \varepsilon, \forall n > m_0$$

Por lo tanto,

$$A_n \rightarrow A,$$

en la norma $\|\cdot\|_1$.

A continuación, introducimos la traza usual de un operador nuclear:

Definición 5.2.4: Sea $A \in f(H)$ un operador compacto y sea (φ_n) una base ortonormal de H . La traza usual de A está definida por:

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n; \varphi_n \rangle$$

El siguiente teorema muestra que la suma de arriba está bien definida:

Teorema 5.2.5: Si $T \in S_1(H)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle$$

converge absolutamente para cualquier base ortonormal (e_k) de H y su suma es independiente de la elección de la base.

Demostración:

Sea

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x_n, y_n \rangle$$

la representación Hilbert-Schmidt de T . Primeramente, veamos que la serie del enunciado converge absolutamente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y_n, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \|x_n\| \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty. \end{aligned}$$

Veamos ahora que la suma no depende de la base ortonormal elegida:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle,$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle y_n, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, e_k \rangle e_k \rangle = \langle y_n, x_n \rangle,$$

tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle y_n, x_n \rangle.$$

Por lo tanto, la suma no depende de la base ortonormal elegida. ■

Ejemplo 5.2.6

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(K) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Luego, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} = \infty,$$

entonces $K \notin S_1(H)$.

Por otro lado, usando la definición 5.2.1, es sencillo demostrar las siguientes propiedades de la traza usual:

1. $Tr(\alpha T + \beta R) = \alpha Tr(T) + \beta Tr(R)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $T, R \in S_1$. Esto se sigue directamente de la definición.
2. $Tr(T^*) = \overline{Tr(T)}$ para $T \in S_1(H)$. En efecto, esto se sigue de las siguientes igualdades

$$Tr(T^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T^* e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, T e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle T e_k, e_k \rangle} = \overline{Tr(T)}.$$

3. Como los operadores unitarios llevan bases ortonormales en bases ortonormales, entonces es claro que el funcional traza usual es unitariamente invariante.

Los tres numerales anteriores demuestran el siguiente corolario:

Corolario 5.2.7: El funcional Tr es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.

El teorema de Lidskii expresa la traza usual de un operador nuclear como la suma de sus autovalores tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas; por esta razón, algunos autores se refieren a la traza usual como una traza espectral, su prueba puede encontrarse en diferentes referencias como son I. Gohberg S. Goldberg and M. Kaashoek (2003), J.R. Retherford (1993). El enunciado es el siguiente:

Teorema 5.2.8 (Lidskii)

Si $T \in S_1(H)$, entonces

$$Tr(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(T),$$

donde, $(\lambda_k(T))$ es la sucesión de valores propios de T ordenados de tal forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

Ejemplo 5.2.9

Por el teorema de Mercer y el teorema 5.2.8, si k una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ y para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds;$$

entonces A es nuclear y

$$\int_a^b k(t, t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = Tr(A).$$

La expresión anterior es llamada la fórmula de la traza y expresa la traza usual del operador A en función de su núcleo, es decir, no depende de los autovalores de A .

5.3 Trazas de Dixmier

La traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular y no es una extensión de la traza de operadores de rango finito, a diferencia de la traza usual. Para su construcción es necesario garantizar la existencia de límites generalizados o estados singulares con ciertas propiedades de invariancia y dilatación. A continuación, presentamos la construcción de la traza de Dixmier asociado a un estado.

Durante toda esta sección, P^∞ denotará el espacio de sucesiones complejas acotadas y C_0 el subespacio de sucesiones convergentes a cero.

Por Carey y Sukochev (2006) existe un estado ω en P^∞ (un funcional lineal positivo en P^∞ tal que $\omega(1, 1, 1, 1, \dots) = 1$) con la siguiente propiedad: para cada $n \geq 1$ se tiene

$$\omega \circ D_n = \omega \circ T = \omega \circ H = \omega,$$

donde

$$T: P^\infty \rightarrow P^\infty, T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

$$H: P^\infty \rightarrow P^\infty, H(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dots)$$

$$D_n: P^\infty \rightarrow P^\infty, D_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{n\text{-veces}}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{n\text{-veces}}, \dots)$$

Observación 5.3.1:

Si un estado ω en P^∞ es invariante por T , entonces $\omega(a) = 0$ para todo $a \in CN$, donde CN denota el espacio de sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos. Además, como CN es denso en C_0 , por continuidad tenemos que $\omega(a) = 0$ para todo $a \in C_0$. De esta forma, hemos conseguido estados que se anulan en C_0 . Estados con esta propiedad, son llamados estados singulares.

Por la observación anterior, hemos conseguido estados singulares invariantes por el operador D_2 , veamos la construcción de la traza de Dixmier.

Consideremos el siguiente espacio:

$$M_{1,\infty}^+(H) = \{T \in K(H) / \|T\|_{1,\infty} = \sup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \right\} < \infty\}$$

Usando la proposición 4.14 se prueba que $M_{1,\infty}(H)$ es un ideal bilátero del algebra $f(H)$.

Sea ω un estado singular en P^∞ invariante por el operador D_2 (su existencia esta garantizada en la observación 5.3.1), sobre

$$M_{1,\infty}^+(H) = \{T \in M_{1,\infty}(H), T \text{ es positivo}\}$$

definimos el funcional Tr_ω por

$$Tr_\omega(T) := \omega\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T)\right).$$

Como $s_k(U^*TU) = s_k(T)$ para todo $U \in f(H)$ unitario, entonces Tr_ω es unitariamente invariante, solo faltaría probar la linealidad. Veamos esto:

Sean

$$T_1, T_2 \in M_{1,\infty}^+(H), \alpha_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_1), \beta_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_2),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_1 + T_2).$$

Por la proposición 2.2.5.17 se tiene que

$$\gamma_n \leq \alpha_n + \beta_n,$$

lo cual implica que

$$Tr_\omega(T_1 + T_2) \leq Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2).$$

Por A. Albeverio, D. Guido, A. Ponosov and S. Scarlatti (1996), para operadores positivos se cumple que

$$\sum_{k=1}^n s_k(T_1) + \sum_{k=1}^n s_k(T_2) \leq \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2).$$

La desigualdad anterior implica que

$$\alpha_n + \beta_n \leq \frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n},$$

y como

$$\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n} - \gamma_{2n} \right) \in C_0,$$

entonces

$$\omega((\gamma_{2n})) = \omega\left(\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n}\right)\right).$$

Veamos ahora que

$$\omega((\gamma_{2n})) = \omega((\gamma_n)).$$

En efecto, como ω es invariante por D_2 , la igualdad anterior es equivalente a que

$$\omega(\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) = \omega((\gamma_n)).$$

Como ω es un estado singular, basta verificar que

$$(\gamma_n) - (\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) \in C_0.$$

Restando lo anterior tenemos

$$(\gamma_1 - \gamma_2, 0, \gamma_3 - \gamma_4, 0, \gamma_5 - \gamma_6, 0, \dots),$$

luego vemos que esta última sucesión converge a cero.

Para esto, basta verificar que

$$\begin{aligned} & (\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n}) \in C_0. \\ \gamma_{2n-1} - \gamma_{2n} &= \frac{1}{\log(2n)} \sum_{k=1}^{2n-1} s_k(T_1 + T_2) - \frac{1}{\log(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2) \\ &= \frac{\log(1+\frac{1}{2n})}{\log(2n+1)} \gamma_{2n-1} - \frac{s_{2n}(T_1 + T_2)}{\log(2n+1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tomamos ω y concluimos que

$$Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2) \leq Tr_\omega(T_1 + T_2),$$

Concluimos entonces que Tr_ω es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}^+(H)$.

Definición 5.3.2. La traza de Dixmier de un operador autoadjunto $T \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(T) := Tr_\omega(T_+) - Tr_\omega(T_-)$$

donde $T_+ = \frac{1}{2}(T + |T|)$ y $T_- = -\frac{1}{2}(T - |T|)$ son operadores positivos llamados la parte positiva y negativa de T respectivamente, donde $|T|$ denota la raíz cuadrada de operador T^*T .

La traza de Dixmier de un operador arbitrario $T \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_{\omega}(T) := Tr_{\omega}(Re(T)) + i Tr_{\omega}(Im(T))$$

donde $Re(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $Im(T) = \frac{-i}{2}(T - T^*)$ son operadores autoadjuntos llamados la parte real e imaginaria de T respectivamente.

El siguiente teorema demuestra que la traza de Dixmier, en efecto, es una traza singular continua sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.

Teorema 5.3.3

- 1) Tr_{ω} es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.
- 2) $Tr_{\omega}(T) = 0, \forall T \in S_1(H)$.
- 3) Tr_{ω} es una funcional lineal continuo con la norma $\|\cdot\|_{1,\infty}$, más precisamente,

$$|Tr_{\omega}(T)| \leq \|T\|_{1,\infty} \forall T \in M_{1,\infty}(H).$$

Demostración:

1) Todo $T \in M_{1,\infty}(H)$ puede escribirse como $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$, donde $T_1=(Re(T))_+$, $T_2=(Re(T))_-$, $T_3=(Im(T))_+$, $T_4=(Im(T))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. como Tr_{ω} es aditivo en $M_{1,\infty}(H)$, entonces Tr_{ω} se extiende por linealidad a un funcional lineal en todo $M_{1,\infty}(H)$. Que el funcional lineal Tr_{ω} sea unitariamente invariante se sigue del hecho que $s_n(U^*TU) = s_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $U \in f(H)$ operador unitario.

2) Como $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$, donde $T_1=(Re(T))_+$, $T_2=(Re(T))_-$, $T_3=(Im(T))_+$, $T_4=(Im(T))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. Basta verificar que si $T \in S_1(H)$ es un operador positivo entonces $Tr_{\omega}(T) = 0$.

En efecto, como $T \in S_1(H)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty,$$

luego

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \leq \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T).$$

Tomando limite a la anterior desigualdad, concluimos que

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \rightarrow 0,$$

y como ω es un estado singular, entonces $Tr_{\omega}(T) = 0$.

3) Puede verificarse que el estado ω es acotado y $\|\omega\| = 1$, por lo tanto

$$|Tr_{\omega}(T)| \leq \|T\|_{1,\infty}, \forall T \in M_{1,\infty}(H).$$

El cual permite establecer la desigualdad pedida para todo T en $M_{1,\infty}(H)$. ■

Definición 5.3.4. Un operador $T \in M_{1,\infty}(H)$ es llamado Dixmier medible si el numero $Tr_{\omega}(T)$ no depende del estado ω elegido.

Observación 5.3.5

Por el teorema anterior, tenemos que, en particular, Tr_{ω} se anula en el ideal de operadores de rango finito. Funcionales con esta propiedad son llamados trazas singulares. Por lo tanto, la traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular.

Alain Connes sugiere otra forma de construir estados invariantes por el operador dilatación D_2 . Veamos esto:

Sea el operador

$$M: P^{\infty} \rightarrow P^{\infty}, M((x_k)_n) = \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \right).$$

Consideremos φ un estado singular, por A. Pietsch (2013) tenemos que

$$MD_2x - Mx \in C_0, \forall x \in P^{\infty},$$

luego, por continuidad de φ tenemos que

$$\varphi MD_2 = \varphi M.$$

Tomando $w = \varphi M$ se tiene

$$wD_2 = w,$$

luego w es invariante por el operador dilatación D_2 .

La traza de Dixmier asociada a este estado es llamada traza de Connes-Dixmier. Por lo tanto, toda traza de Connes-Dixmier es traza de Dixmier, pero el reciproco no siempre es cierto. Por lo tanto, si denotamos por \mathcal{D} el conjunto de trazas de Dixmier y por \mathcal{C} el conjunto de trazas de Connes-Dixmier, entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Ejemplo 5.3.6

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H . Consideremos el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Luego

$$s_n(T) = \frac{1}{n}.$$

Claramente $T \in M_{1,\infty}(H)$ y

$$Tr_\omega(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2.$$

Por lo tanto, T es Dixmier medible.

Observación 5.3.7

Puede encontrarse en S. Lord, F. Sukochev and D. Zanin (2012) que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores y multiplicidades algebraicas del operador considerado.

Mas precisamente, tenemos que:

Si $T \in M_{1,\infty}(H)$ entonces

$$Tr_\omega(T) = \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) \right).$$

Ejemplo 5.3.8

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(K) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Luego, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} = \infty,$$

entonces $K \in M_{1,\infty}(L^2[0,1])$.

Ahora supongamos que K tiene un autovalor λ con autovector no nulo f , entonces

$$Kf = \lambda f,$$

lo que implica

$$2i \int_0^t f(s) ds = \lambda f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$2if(t) = \lambda f'(t), f(0) = 0,$$

lo que implica que $f = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador K no tiene autovalores. Usando la observación 5.3.7 tenemos que

$$Tr_{\omega}(K) = \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(K) \right) = 0, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2.$$

Por lo tanto, K es Dixmier medible.

Observación 5.3.9

Otras trazas singulares pueden encontrarse en Guido, D. and Isola, T. (2002), Albeverio, A., Guido, D., Ponosov, A. and Scarlatti, S. (1996) y Varga, J.V. (1989).

5.4 Aplicaciones de trazas

Como primera aplicación de la teoría de trazas, en particular la traza de Dixmier, tenemos el comportamiento asintótico de los autovalores de un operador. Veamos esto:

Por Lord, Sukochev y Zanin (2012), tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.4.1

Un operador positivo $T \in M_{1,\infty}(H)$ es Dixmier medible si y solo si el limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T),$$

existe.

Observación 5.4.2

Como consecuencia directa del teorema 5.4.1, podemos afirmar que si $T \in M_{1,\infty}(H)$ es un operador positivo Dixmier medible y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) = 1,$$

entonces las sucesiones $(\log(n+1))$ y $(\sum_{k=1}^n \lambda_k(T))$ son asintóticamente equivalentes.

Por otra parte, si $T \in M_{1,\infty}(H)$ es un operador positivo Dixmier medible y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) = 0,$$

Entonces la sucesión $(\log(n+1))$ crece más rápidamente que la sucesión $(\sum_{k=1}^n \lambda_k(T))$.

Como segunda aplicación de la teoría de trazas podemos comentar lo siguiente:

Basados en el trabajo de Marchenko, H. Aden y Carl, B. (1996) inventaron el método del operador o método de traza para encontrar soluciones para la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv):

$$v_t = v_{xxx} + 3v_x^2$$

La principal idea de este método consiste en:

Dada una ecuación diferencial parcial no lineal y una solución escalar específica, el primer paso para encontrar otras soluciones es trasladar la ecuación no lineal dada, a una ecuación de operadores con su respectiva solución. Habiendo obtenido esta solución, el segundo paso es transferirla a una solución escalar usando un funcional adecuado (una traza). Este método fue usado por diferentes autores a otras ecuaciones diferenciales no lineales como la Kdv modificada, Sine-Gordon y la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP).

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Aden, C. and Carl, B. (1996). On realizations of solutions of the KdV equation by determinants on operator ideals. *J. Math. Phys.* 37, 1833-1857.

Albeverio, A., Guido, D., Ponosov, A. and Scarlatti, S. (1996). Singular traces and compact operators. *J. Funct. Anal.* 137,281-302.

Carey, A. L. and Sukochev, F. A. (2006). Dixmier Traces and some applications to noncommutative geometry. *Uspek hi mat. Nauk*,61(6(372)):45-110.

Connes, A. (1990). *Geometrie non commutative*. Paris: Interditions.

Dixmier, J. (1966). Existences de traces non normales, C.R. Acad. Sci. Paris 262.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000). *Traces and determinants of linear operators, Operator Theory: Advances and Applications*. Basel: Birkhauser Verlag.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003). *Basic Classes of Linear Operators*. Basel: Birkhauser.

Guido, D. and Isola, T. (2002). On the Domain of Singular Traces. *J. Funct. Anal.* 13, 667-674.

Pietsch, A. (1987). *Eigenvalues and s-Numbers*, Geest & Portig. Leipzig: Cambridge Univ. Press.

Pietsch, A. (2013). Connes-Dixmier versus Dixmier traces. *Integral Equations Operator Theory* 77(2), 243-259.

Retherford, J. R. (1993). *Hilbert Space: Compact Operator and the Trace Theorem*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012). *Singular Traces, Theory and Applications*. Berlin: De Gruyter.

Varga, J.V. (1989). Traces on irregular ideals. *Proc. Amer. Math. Soc.* 107, 715.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



CONSTANCIA N° 01-2022-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

DR. SOTELO PEJERREY, ALFREDO

Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, ha obtenido un resultado del 0% como resultado del Análisis de Urkund, realizado a su Informe Final de Investigación titulado "**TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT**".

Se expide la presente a solicitud del interesado para los fines pertinentes.

Bellavista, 12 de abril del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



Dr. WHUALKUER LOZANO BARTRA
Director

c.c.: Archivo

Document Information

Analyzed document	INFORME FINAL-ALFREDO SOTELO PEJERREY-ANALISIS URKUND.pdf (D133475436)
Submitted	2022-04-12T19:41:00.0000000
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.orkund.com

Sources included in the report

Entire Document

5	INDICE TABLAS DE CONTENIDO	7	RESUMEN	8	ABSTRACT	9	INTRODUCCIÓN	10	CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11	1.1 Descripción de la realidad problemática.	11	1.2 Formulación del problema.	11
12	1.3 Objetivos	12	1.3.1 Objetivos generales.	12	1.3.2 Objetivos específicos.	12	1.4 Limitantes de la Investigación	12	14	CAPITULO II. MARCO TEÓRICO	14	2.1 Antecedentes.	14	2.2 Marco.
15	Teórico.	15	Conceptual	15	63	2.3 Definición de términos básicos	64	CAPITULO III. HIPÓTESIS Y VARIABLES	67	3.1 Hipótesis.	67	3.2 Definición conceptual de las variables.	67	3.3 Operacionalización de la variable
68	CAPITULO IV. DISEÑO METODOLÓGICO	69	4.1 Tipo y diseño de la investigación.	69	4.2 Método de investigación.	69	4.3 Población y muestra.	69	4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado.	69	4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de información.	70	4.6 Análisis y procesamiento de datos.	70
72	6	5.1 Resultados descriptivos	72	5.2 Resultados inferenciales	77	5.3 Otro tipo de resultado estadístico, de acuerdo a la naturaleza del problema	78	CAPITULO VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	79	6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados	79	6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares	80	6.3 Responsabilidad ética
80	CONCLUSIONES	81	RECOMENDACIONES	83	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84	ANEXOS	87						

7 TABLAS DE CONTENIDO Índice de figuras Ninguna

8 RESUMEN “TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT” Alfredo Sotelo Pejerrey La presente investigación estudia diversos funcionales sobre espacios de Hilbert llamados trazas. Se estudia la traza de operadores de rango finito, la traza usual y la traza de Dixmier. Algunas aplicaciones de estos funcionales son mencionadas. Palabras Claves: Operador compacto, traza de Dixmier, espacio de Hilbert.

9 ABSTRACT "TRACES OF OPERATORS ON HILBERT SPACES" Alfredo Sotelo Pejerrey This research studies several functional on Hilbert spaces called traces. It is studied the trace of finite rank operators, the usual trace and the Dixmier trace. Some applications of these functional are mentioned. Keywords: Compact operator, Dixmier trace, Hilbert space.

10 INTRODUCCIÓN La traza de una matriz cuadrada se define como la suma de elementos de su diagonal o equivalentemente como la suma de sus valores propios. Este funcional es lineal y se anula en los conmutadores, es decir, $(\cdot) = (\cdot)$. En el contexto de operadores en espacios de Banach y Hilbert, un problema no trivial es determinar una clase de operadores donde se pueda definir un funcional traza, es decir, un funcional lineal que se anula en los conmutadores; este problema es difícil pues la suma de valores propios de un operador podría diverger. El presente trabajo de investigación está centrado en el estudio de funcionales trazas sobre ciertos ideales de operadores. Inicialmente estudiamos la traza de operadores de rango finito y la traza usual definida sobre el ideal de operadores nucleares. El primer ejemplo de traza singular fue dado por Jacques Dixmier en su artículo de 1966. Una traza singular es un funcional traza que se anula en el ideal de operadores de rango finito, es por ello que no es una extensión de la traza matricial usual. Este trabajo de investigación presenta una forma alternativa de la construcción de la traza de Dixmier y escogiendo un estado adecuado se construye la traza de Connes-Dixmier; todo esto es importante ya que sus aplicaciones se ven reflejadas en el libro de Alain Connes titulado geometría noconmutativa,

11 CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 1.1. Descripción de la realidad problemática Sea un espacio de Hilbert complejo infinito dimensional y un operador lineal y acotado en \mathcal{H} . El operador es de rango finito si la dimensión de su imagen es finita, es decir, si $(\cdot) > \infty$; y el espacio de operadores de rango finito en \mathcal{H} es denotado por $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Todo $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ puede representarse de la forma: $T = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, e_n \rangle e_n$, $(\cdot) < \infty$, y usando esta representación, podemos definir el siguiente funcional: $\text{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T e_n, e_n \rangle$. Este funcional satisface las siguientes propiedades: a) es un funcional lineal b) $\text{tr}(T) = \text{tr}(T^*)$, $\forall T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\forall e_n \in \mathcal{H}$, aquí $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ representa el álgebra de operadores lineales y acotados en \mathcal{H} . c) $\text{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T e_n, e_n \rangle$, aquí λ_n son los autovalores no nulos de T . De las tres propiedades anteriores, vemos que el funcional satisface las propiedades usuales de la traza matricial, es por ello,

que el funcional lineal es llamado funcional traza sobre $\mathcal{K}(H)$. Además, como toda matriz puede identificarse como un operador lineal entre espacios de dimensión finita, el funcional es una extensión de la traza matricial. Esto nos conduce al estudio de definir funcionales sobre ciertos ideales de operadores que satisfacen las propiedades a), b) y c); a estos funcionales

12 los llamaremos funcionales trazas. Una especial atención tendremos en la propiedad c) ya que como trabajaremos sobre espacios de dimensión infinita, la suma de arriba podría diverger. En la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática se dicta el curso electivo de la línea 1 de Teoría Espectral en espacios de Hilbert. Varias herramientas de este curso son usadas para trabajar este proyecto, es por ello que este trabajo de investigación puede considerarse como una aplicación de dicho curso. 1.2. Formulación del problema Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes: Problema General: ¿Qué otras trazas de operadores en espacios de Hilbert podemos definir? Problemas Específicos 1. ¿Toda traza es una extensión de la traza usual? 2. ¿Qué aplicaciones de los funcionales trazas existen? 1.3. Objetivos de la investigación 1.3.1. Objetivos generales Construir la traza usual, traza de Dixmier, Connes-Dixmier de operadores en espacios de Hilbert. 1.3.2. Objetivos específicos 1. Mostrar que existen trazas que no son extensiones de la traza usual. 2. Mostrar las aplicaciones de los funcionales traza para hallar la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

13 1.4. Limitantes de la investigación Un problema usual que se presenta cuando se trabaja sobre espacios de Hilbert es extender los resultados a espacios de Banach, es así que un limitante teórico de la investigación es trabajar en el contexto de espacios de Banach infinito dimensionales. Por otro lado, debido al tiempo que llevará realizar las diversas etapas del proyecto como revisión e interpretación de la información bibliográfica y su traducción al español de los diversos artículos científicos; para la construcción de las trazas sobre ciertos ideales de operadores en espacios de Hilbert se establece el plazo de 12 meses como límite temporal para el desarrollo de todo el proyecto. La limitante espacial se encuentra dentro del enfoque teórico de los espacios de Banach con la propiedad de aproximación y los espacios de Hilbert débiles.

14 CAPITULO II. MARCO TEÓRICO 2.1 Antecedentes Nacional J. Alcántara-Bode (2002) estudia el conjunto de trazas del operador definido en $L^2(0,1)$ por $(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$. El estudio de este operador es importante por su relación con la famosa hipótesis de Riemann. Internacional 1) J. Dixmier (1966). Es en este artículo donde construye la famosa traza de Dixmier, este fue el primer ejemplo de una traza singular definida sobre el ideal de operadores de Lorentz. Su importancia radica en sus aplicaciones a la Geometría No conmutativa, ello puede ser observado en el libro de Alain Connes titulado Geometría No conmutativa. 2) J.V. Varga (1989) introduce los operadores irregulares y excéntricos, estas clases de operadores, definidos sobre espacios de Hilbert, permiten establecer la existencia de trazas no triviales. 3) A. Albeverio, D. Guido, A. Ponzonov, and S. Scarlatti (1996), caracteriza a aquellos operadores definidos en espacios de Hilbert separables de tal manera que admitan una traza singular no trivial, es decir, existe una traza singular en el ideal generado por de tal forma que $0 < \text{tr}(T) < \infty$. Estos operadores son los llamados excéntricos generalizados y generalizan a los operadores excéntricos dados en el artículo de J. Varga. 4) I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik (2000), es el texto más completo que trata de trazas y determinantes sobre espacios de Banach. Inicialmente se define trazas y determinantes de operadores de rango

15 finito sobre espacios de Banach para luego extender estos funcionales a subálgebras sumergidas con la propiedad de aproximación, por ejemplo, al subálgebra de operadores de clase traza o al subálgebra de operadores integrales con núcleo continuo. 2.2 MARCO TEORICO 2.2.1 Espacios de Banach Definición 2.2.1.1: Sea un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$. Una norma $\| \cdot \|$ es una aplicación definida en V con valores no negativos que satisface: i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ii. $\| \alpha x \| = |\alpha| \|x\| \forall \alpha \in \mathbb{K}$ iii. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$ El par $(V, \| \cdot \|)$ será llamado espacio normado. Ejemplo 2.2.1.2: Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ definimos las aplicaciones $\| \cdot \|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\| \cdot \|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ III. $\| \cdot \| = \{ \| \cdot \|_1; \| \cdot \|_2; \dots \}$ Entonces $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|_1)$; $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|_2)$; $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|)$ son espacios normados. En particular, si $n=1$, entonces $(\mathbb{R}; \| \cdot \|_1) = (\mathbb{R}; \| \cdot \|_2) = (\mathbb{R}; \| \cdot \|) = (\mathbb{R}, | \cdot |)$. Ejemplo 2.2.1.3 El espacio de funciones continuas con valores en \mathbb{K} definidas en $[a, b]$ es denotado por $C[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \}$

16 $[a, b]$ define un espacio vectorial sobre \mathbb{K} con las operaciones de suma puntual de funciones y multiplicación por un escalar. Si definimos las aplicaciones en $C[a, b]$ por I. $\|f\| = \{ \|f\|_\infty; \|f\|_1 \}$, II. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$, Se demuestra que los pares $(C[a, b]; \| \cdot \|_\infty)$, $(C[a, b]; \| \cdot \|_1)$ son espacios normados. Ejemplo 2.2.1.4 El espacio de sucesiones reales acotadas es denotado por $\ell^\infty = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada} \}$, ℓ^∞ , con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar componente a componente, define un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , y si definimos la aplicación sobre ℓ^∞ $\| (x_n) \| = \{ \| (x_n) \|_\infty; \| (x_n) \|_1 \}$, no es difícil demostrar que el par $(\ell^\infty; \| \cdot \|_\infty)$ es un espacio normado. Ejemplo 2.2.1.5 Para $p \geq 1$, definimos el espacio $[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \}$. El espacio $[a, b]$ define un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con la suma puntual de funciones y la multiplicación por un complejo. La siguiente aplicación sobre $[a, b]$ $\|f\| = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$, define una norma en $[a, b]$. Por lo tanto, el par $([a, b]; \| \cdot \|)$ es un espacio normado. Ejemplo 2.2.1.6 Para $p \geq 1$, definimos el espacio

17 $(\mathbb{R}) = \{ \{ N \subset \mathbb{R} : \sum | \dots \} \}$. El espacio (\mathbb{R}) , con la suma y multiplicación por un real componente a componente, define un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una norma sobre (\mathbb{R}) está dada por $\|(\cdot)\| = (\sum | \dots)^{1/2}$. Por lo tanto, el par $(\mathbb{R}; \|\cdot\|)$ es un espacio normado. Definición 2.2.1.7: Una sucesión $(\cdot) \in \mathbb{N}$ en un espacio normado $(\cdot; \|\cdot\|)$ se dice convergente a un punto \in si $\forall < 0; \exists 0 \in \mathbb{N} : \| - \| > ; \forall \geq 0$. Que la sucesión $(\cdot) \in \mathbb{N}$ converja al punto es denotado por $\lim \rightarrow \infty =$. Definición 2.2.1.8: Sea $(\cdot; \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(\cdot) \in \mathbb{N}$ una sucesión, decimos que $(\cdot) \in \mathbb{N}$ es una sucesión de Cauchy $\forall < 0, \exists 0 \in \mathbb{N} : \| - \| > , \forall , \geq 0$ Propiedades algebraicas de convergencia son dadas en la siguiente proposición: Proposición 2.2.1.9 Sea $(\cdot; \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(\cdot) \in \mathbb{N}, (\cdot) \in \mathbb{N} \subset V$ sucesiones en $.$ Entonces a) Si $\rightarrow \infty = , \rightarrow \infty =$ entonces $\rightarrow \infty + = + .$ b) Si $\rightarrow \infty =$ entonces $\rightarrow \infty = .$ Ejemplo 2.2.1.10 Consideremos el espacio normado $([0,1]; \|\cdot\|)$. Sea la sucesión de funciones continuas $(\cdot) = .$ Sea también $(\cdot) = 0$.

18 $\| - \| = \int 1 0 = 1 + 1 \rightarrow 0$, entonces $\rightarrow 0$ con la norma $\|\cdot\|$. Sin embargo, $\| - \| = 1$ por lo tanto, la sucesión $(\cdot) \in \mathbb{N}$ no converge a con la norma $\|\cdot\|$. Definición 2.2.1.11: Un espacio normado $(\cdot; \|\cdot\|)$ es llamado espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en es convergente en $.$ Ejemplo 2.2.1.12 Los pares a) $(\mathbb{R}; \|\cdot\|_1)$; $(\mathbb{R}; \|\cdot\|_2)$; $(\mathbb{R}; \|\cdot\|)$; b) $([,]; \|\cdot\|, \geq 1)$; c) $([,]; \|\cdot\|)$; d) $(\mathbb{R}; \|\cdot\|, \geq 1)$; e) $(\infty; \|\cdot\|)$ son espacios de Banach. Un resultado conocido en el contexto de espacios normados de dimensión finita es que todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. Más precisamente, el resultado es el siguiente: Teorema 2.2.1.13: Si $(\cdot, \|\cdot\|)$ es un espacio normado con $> \infty$, entonces $(\cdot, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. 2.2.2 Espacios de Hilbert Definición 2.2.2.1: Sea un espacio vectorial sobre un cuerpo $= \mathbb{R} \mathbb{C}$. Un producto interno es una aplicación: $\langle \cdot ; \cdot \rangle : \rightarrow \mathbb{C}$ tal que se satisface: i. $\langle ; \rangle \geq 0, \forall \in , \langle ; \rangle = 0 \iff = 0$ ii. $\langle + ; \rangle = \langle ; \rangle + \langle ; \rangle \forall , , \in , ,$

19 iii. $\langle ; \rangle = \langle ; \rangle \forall , \in$ El par $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es llamado espacio con producto interno. Observación 2.2.2.2 Todo producto interno satisface la siguiente propiedad: Sea $, \in , \in$ luego: $\langle ; \rangle = \langle ; \rangle$ Un resultado elemental en todo espacio con producto interno es la desigualdad de Cauchy-Schwartz, resultado es el siguiente: Teorema 2.2.2.3 Si $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces $|\langle ; \rangle| \leq \langle ; \rangle^{1/2} \langle ; \rangle^{1/2} \forall , \in$. Observación 2.2.2.4 Todo producto interno induce una norma, más precisamente, si $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces $\| \| = \langle ; \rangle^{1/2}$, define una norma en $.$ Definición 2.2.2.5: Sea $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y un subconjunto de $.$ El conjunto es llamado ortonormal si $\langle ; \rangle = 0, \forall , \in$ con $\neq ; y \langle ; \rangle = 1, \forall \in$. Definición 2.2.2.6: El par $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es llamado un espacio de Hilbert si es completo con la norma inducida por su producto interno. Una desigualdad importante es la llamada desigualdad de Bessel: Definición 2.2.2.7: Sea $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y un subconjunto ortonormal de $.$ El conjunto es llamado una base ortonormal de si: $\langle , \rangle = 0, \forall \in ,$ entonces $= 0$. Ejemplo 2.2.2.8 Los pares a) $(2 [,]; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ donde

20 $\langle , \rangle = \int () ()$ b) $(2 (\mathbb{R}); \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ donde $\langle (), () \rangle = \sum \infty = 1$. c) $(\mathbb{R}; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ $\langle , \rangle = \sum = 1, = (1, 2, \dots,) = (1, 2, \dots,)$. Definición de Hilbert. Ejemplo 2.2.2.9 Sobre el espacio vectorial $2 (\mathbb{R})$ definimos el producto interno $\langle (), () \rangle = \sum \infty = 1$. Se cumple que el par $(2 (\mathbb{R}), \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert. Si definimos el vector $= (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, donde el número 1 se ubica en el orden k-ésimo. Entonces el conjunto $\{ 1, 2, \dots, \dots \}$ define un conjunto ortonormal, más aún, define una base ortonormal para $2 (\mathbb{R})$. Ejemplo 2.2.2.10 La familia $\{ 1 \sqrt{2}, \sqrt{1}, \sqrt{1} \}$ Define una base ortonormal para el espacio $2 [- ,]$. Una desigualdad bastante conocida en el contexto de espacios con producto interno es la desigualdad de Bessel: Teorema 2.2.2.11 (Desigualdad de Bessel): Sea $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $\{ 1, 2, \dots, \dots \}$ un conjunto ortonormal de $.$ Entonces

21 $\sum |\langle ; \rangle|^2 \leq \| \|^2, \forall \in$. Corolario 2.2.2.12: Sea $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{ 1, 2, \dots, \dots \}$ una base ortonormal de $.$ Entonces todo \in puede escribirse de la forma $= \sum \langle ; \rangle \infty = 1$ Demostración: Solo observe que $\langle - \sum \langle ; \rangle \infty = 1, \rangle = 0, \forall \in \mathbb{N}$, luego $= \sum \langle ; \rangle \infty = 1$ Observación 2.2.2.13 Si en la desigualdad de Bessel tomamos una base ortonormal, entonces la desigualdad se transforma en una igualdad. Mas precisamente, Sea $(\cdot, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $\{ 1, 2, \dots, \dots \}$ una base ortonormal de $.$ Entonces $\sum |\langle ; \rangle|^2 \leq \| \|^2, \forall \in$. Esta última igualdad puede verse como una generalización del teorema de Pitágoras. 2.2.3 Operadores lineales acotados. Definición 2.2.3.1: Sea $(\cdot; \|\cdot\|) (\cdot; \|\cdot\|)$ dos espacios normados. Una aplicación $: \rightarrow$ que satisface: i. $(+) = () + () \forall , \in$ ii. $(\cdot) = () \forall \in , \in = \mathbb{R} \mathbb{C}$

22 es llamado un operador lineal. El espacio de operadores lineales $: \rightarrow$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma puntual de operadores y la multiplicación puntual por un escalar. Este espacio es denotado por $\mathcal{L} (,) = \{ : \rightarrow : \text{es un operador lineal} \}$ Definición 2.2.3.2: Sea $(\cdot; \|\cdot\|) (\cdot; \|\cdot\|)$ dos espacios normados. Un operador lineal $: \rightarrow$ es llamado acotado si existe un < 0 tal que $\| \| \leq \| \|, \forall \in$. El espacio de operadores lineales y acotados $: \rightarrow$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma puntual de operadores y la multiplicación puntual por un escalar. Este espacio es denotado por $(,) = \{ : \rightarrow : \text{es un operador lineal acotado} \}$ La norma de un operador lineal y acotado $: \rightarrow$ está definida por $\| \| = \sup \{ \| \| \} = \| \| \{ \| \| \} = \| \| \{ \| \| \}$. Luego si $\| \| \leq \| \|, \forall \in$ entonces $\| \| \leq$. La norma de un operador lineal y acotado permite definir el siguiente espacio normado $((,) , \| \|)$. Ejemplo 2.2.3.3 Sea $: ([0,1]; \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow () = \int () 1 0$ Usando la linealidad de la integral, es inmediato afirmar que es un operador lineal. Ahora veamos que es un operador lineal acotado, En efecto, si $\in [,]$, entonces

23 $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |T_{j1}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} 1} = \infty$, luego $\|T\| = \infty$. Por lo tanto, es acotado y $\|T\| \leq 1$. Por otra parte, si $x = 1$ entonces $\|Tx\| = 1 \leq \infty$. Por lo tanto, $\|T\| = 1$. Ejemplo 2.2.3.4 Sea $T: \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R})$, $(T(x))_n = (0, 1, 2, 3, \dots)$. Es claro que es un operador lineal. Como $\|(T(x))_n\|_2 = \|x\|_2$, entonces es acotado y $\|T\| = 1$. Ejemplo 2.2.3.5 Sea $T: \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R})$, $(T(x))_n = (2, 3, 4, \dots)$. Es claro que es un operador lineal. Como $\|(T(x))_n\|_2 \leq \|x\|_2$, entonces es acotado y $\|T\| \leq 1$. Si $x = (1, 0, 0, \dots)$ entonces $\|(T(x))_n\|_2 = 1$. Luego $\|T\| = 1$.

24 $\|(T(x))_n\|_2 \leq \|x\|_2$. Por lo tanto, $\|T\| = 1$. 2.2.4 Operadores compactos Definición 2.2.4.1: Sean X, Y dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(X; Y)$. El operador es llamado de rango finito si $\dim(T(X)) < \infty$, donde denota la imagen o rango de T . El espacio de operadores de rango finito de X a Y es denotado por $\mathcal{K}(X; Y) = \{T \in \mathcal{L}(X; Y) : \dim(T(X)) < \infty\}$. Adicionalmente a esto, si $X = Y$ entonces $\mathcal{K}(X; X)$ será denotado por $\mathcal{K}(X)$. Ejemplo 2.2.4.2 Sea un espacio de Hilbert X y x_1, x_2, x_3, \dots vectores en X . Sea el operador $T: X \rightarrow X$ $T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j$. Claramente es un operador lineal y acotado. Por otra parte, como $\|T(x)\| \leq \|x\|$, entonces $\dim(T(X)) \leq \infty$, por lo tanto, es un operador de rango finito. Ejemplo 2.2.4.3 Sobre el espacio ℓ^2 definimos el operador $(T(x))_n = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j$, donde $\{x_1, x_2, \dots\}$ y $\{y_1, y_2, \dots\}$ son conjuntos de funciones en ℓ^2 . El operador puede escribirse en la forma

25 $(T(x))_n = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j$, luego $\|T(x)\| = \|x\|$, entonces $\|T\| = 1$, Por lo tanto, $\dim(T(X)) \leq \infty$, por lo tanto, es un operador de rango finito. El siguiente teorema muestra que el espacio $\mathcal{K}(X; Y)$ tiene estructura de subespacio vectorial. Teorema 2.2.4.4: $\mathcal{K}(X; Y)$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{L}(X; Y)$. Demostración: Si $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X; Y)$, entonces $\dim(T_1 + T_2(X)) \leq \dim(T_1(X)) + \dim(T_2(X)) < \infty$. Por lo tanto $T_1 + T_2 \in \mathcal{K}(X; Y)$. Obviamente que $\lambda T \in \mathcal{K}(X; Y)$ para todo escalar. Definición 2.2.4.5: Sean X, Y dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(X; Y)$. El operador es llamado compacto si para toda sucesión acotada $(x_n) \subset X$ existe una subsucesión de $(x_n) \subset X$ convergente. El espacio de operadores compactos de X a Y es denotado por $\mathcal{K}(X; Y) = \{T \in \mathcal{L}(X; Y) : T \text{ es compacto}\}$. Si $X = Y$ entonces $\mathcal{K}(X; X)$ se escribirá como $\mathcal{K}(X)$.

26 El siguiente teorema muestra que el espacio $\mathcal{K}(X; Y)$ tiene estructura de subespacio vectorial. Teorema 2.2.4.6: $\mathcal{K}(X; Y)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(X; Y)$. Demostración: Sea $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X; Y)$ y $(x_n) \subset X$ una sucesión acotada entonces existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subset (x_n) \subset X$ tal que la sucesión $(x_{n_k}) \subset X$ es convergente. Como Y es compacto entonces existe una subsucesión $(y_{n_{k_j}}) \subset (y_{n_k}) \subset Y$ tal que la sucesión $(y_{n_{k_j}}) \subset Y$ es convergente. Luego la sucesión $((T_1 + T_2)(x_{n_{k_j}}))$ es convergente. Por lo tanto, el operador $T_1 + T_2$ es compacto. Trivialmente $\lambda T \in \mathcal{K}(X; Y)$ para todo escalar. Teorema 2.2.4.7: $\mathcal{K}(X)$ es un ideal bilátero del álgebra $\mathcal{L}(X)$. Demostración: Por el teorema anterior $\mathcal{K}(X)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X)$. Veamos ahora que $\mathcal{K}(X) \mathcal{L}(X) \subset \mathcal{K}(X)$, $\mathcal{L}(X) \mathcal{K}(X) \subset \mathcal{K}(X)$. En efecto, sea $(x_n) \subset X$ sucesión acotada entonces existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subset (x_n) \subset X$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ como es continua se tiene $x_{n_k} \rightarrow x$. Por tanto es compacto. Sea $(y_n) \subset X$ sucesión acotada entonces $(y_n) \subset X$ es acotada. Luego existe una subsucesión $(y_{n_k}) \subset (y_n) \subset X$ tal que $(y_{n_k}) \subset X$ es convergente. El teorema de Bolzano-Weierstrass en el contexto de \mathbb{R} o \mathbb{C} establece que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. El siguiente teorema generaliza este resultado a espacios de Banach de dimensión finita. El resultado es el siguiente:

27 Teorema 2.2.4.8: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces $\dim X < \infty$ si y solo si para toda sucesión $(x_n) \subset X$ acotada, existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subset (x_n) \subset X$ convergente. Demostración: Supongamos que $\dim X = \infty$ y $\{e_1, e_2, \dots\}$ una base para X . Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión acotada. Entonces existe un $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Cada elemento de la sucesión puede escribirse como combinación lineal de elementos de la base, esto es, $x_n = \sum_{j=1}^{\infty} x_{nj} e_j = \sum_{j=1}^n x_{nj} e_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} x_{nj} e_j = \sum_{j=1}^n x_{nj} e_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_{nj}| e_j$. Por el lema de la combinación lineal tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $(\| \sum_{j=1}^n x_{nj} e_j \| + \| \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_{nj}| e_j \|) \leq M < 2M$; $j \in \mathbb{N}$. Luego para $1 \leq n \leq \infty$ tenemos que $\|x_n\| \leq \| \sum_{j=1}^n x_{nj} e_j \| + \| \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_{nj}| e_j \| \leq 2M$. Entonces la sucesión $(x_n) \subset X$ es acotada. Luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subset (x_n) \subset X$ convergente, digamos que $x_{n_k} \rightarrow x$ cuando $k \rightarrow \infty$. Sea $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \in X$, luego

28 $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$. Obviamente $(x_{n_k}) \subset X$ es una subsucesión de $(x_n) \subset X$. Además $\|x_{n_k} - x\| = \| \sum_{j=1}^{\infty} (x_{n_k j} - x_j) e_j \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_{n_k j} - x_j|^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_{n_k j} - x_j| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x\| = 0$. Esto nos dice que existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subset (x_n) \subset X$ convergente. Para la otra implicación, supongamos que $\dim X = \infty$. Sea $x_1 \in X$ $\|x_1\| = 1$ y sea $x_2 = \{x_1\}$. Luego x_2 es un conjunto cerrado en X . Luego por el lema de Riesz, para $x_2 \subset X$ existe un $x_3 \in X$ $\|x_3 - x_2\| \geq 1/2$ $\|x_3\| = 1$. Sea ahora $x_4 = \{x_1, x_2\}$. Luego x_4 es un conjunto cerrado en X . Luego por el lema de Riesz, existe un $x_5 \in X$ $\|x_5 - x_4\| \geq 1/2$ $\forall x \in x_4$ $\|x_5\| = 1$. En particular tenemos que $\|x_5 - x_1\| \geq 1/2$ $\|x_5 - x_2\| \geq 1/2$. Siguiendo este proceso de forma inductiva, tenemos una sucesión $(x_n) \subset X$ en la bola unitaria cerrada $(0, 1)$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$, lo cual nos dice que de $(x_n) \subset X$ no se puede extraer subsucesiones convergentes, lo cual contradice la hipótesis.

29 Como consecuencia directa del teorema 2.2.4.8 se tiene el siguiente corolario: Corolario 2.2.4.9 a) Todo operador de rango finito es compacto, es decir, $\mathcal{K}(X; Y) \subset \mathcal{K}(X; Y)$ b) Si $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ y $\dim X < \infty$, entonces $T \in \mathcal{K}(X; Y)$. El siguiente teorema prueba que el espacio de operadores compactos es cerrado con la norma de operadores. Teorema 2.2.4.10 Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión en X tal que $x_n \rightarrow x$. Entonces $T(x_n) \rightarrow T(x)$. Veamos algunos ejemplos de operadores compactos: Ejemplo 2.2.4.11 Sea un espacio de Hilbert de dimensión infinita y (e_j) un conjunto ortonormal infinito en X . Consideremos a T como el operador

36 $\|x\| = \{|\langle x, y \rangle| : \|y\| = 1\}$. Luego existe una sucesión $(y_n) \geq 1$ tal que $\|y_n\| = 1$ $|\langle x, y_n \rangle| \rightarrow \|x\|$. Luego la sucesión $(|\langle x, y_n \rangle|) \geq 1 \subset \mathbb{R}$ es acotada y por el teorema de Bolzano - Weierstrass existe una subsucesión $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ tal que $\langle y_{n_k}, y_{n_l} \rangle \rightarrow 0$. Entonces $\|y_{n_k} - y_{n_l}\| \rightarrow 0$, de donde $\|y_{n_k}\| = 1$. Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad que $\|y_{n_k}\| = 1$. Como $0 \leq \|y_{n_k} - y_{n_l}\|^2 = \|y_{n_k}\|^2 + \|y_{n_l}\|^2 - 2|\langle y_{n_k}, y_{n_l} \rangle| \rightarrow 0$ Entonces $\|y_{n_k} - y_{n_l}\| \rightarrow 0$. Luego, por compacidad existe una subsucesión $(y_{n_{k_j}}) \subset (y_{n_k})$ tal que $y_{n_{k_j}} \rightarrow y$, esto nos dice que $(\|y_{n_{k_j}}\|) \rightarrow \|y\|$. Por lo tanto $\|y\| = 1$, concluyendo que $y \in \{y_n\}$. Por tanto, $\|x\| = \max_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|$ dedonde $\|x\|$ es autovalor de T . Lema 2.2.5.2: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y un subespacio invariante por T , es decir, $T(V) \subset V$. Entonces V^\perp es invariante por T^* . Demostración: Sea $x \in V^\perp$, entonces para cada $y \in V$ se tiene $\langle Ty, x \rangle = \langle y, T^*x \rangle = 0$ (pues $y \in V$). Luego: $T^*x \in V^\perp$.

37 Teorema 2.2.5.3: (Espectral para operadores compactos autoadjuntos) Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto autoadjunto, entonces existe un sistema ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ de autovectores de T con autovalores correspondientes: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tal que para cada n , se tiene: $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$ (2.1) Si la sucesión (λ_n) es infinita, entonces: $\lambda_n \rightarrow 0$. Demostración: Por el teorema 2.2.5.1, tiene un autovalor λ_1 tal que $\|e_1\| = 1$. Sea $V_1 = \{e_1\}^\perp$. Como V_1 es invariante por T , entonces por el lema 2.2.5.2, $T|_{V_1}$ es invariante por T^* , $(T|_{V_1})^2 \subset V_1$. Ahora consideremos $T_2 = T|_{V_1}$, entonces T_2 es compacto y autoadjunto en V_1 , luego por el teorema 2.2.5.1, T_2 tiene un autovalor λ_2 con $\|e_2\| = 1$, además $\|e_2\| = 1$ y $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. Sea $V_2 = \{e_1, e_2\}^\perp$, entonces por el lema 2.2.5.2 tenemos que $(T|_{V_2})^2 \subset V_2$. Ahora consideremos $T_3 = T|_{V_2}$, entonces T_3 es compacto y autoadjunto en V_2 . Continuando con este proceso, hemos construido una sucesión de autovalores $(\lambda_n) \geq 1$ de tal que $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|, \forall n \in \mathbb{N}$, y un sistema ortonormal de vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$. Como T es compacto, entonces si la sucesión $(\lambda_n) \geq 1$ es infinita tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. Ahora veamos la representación de T :

38 Caso 1: si $\lambda_n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \cdot, e_k \rangle e_k$. $T^* = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \cdot, e_k \rangle e_k = T$. Caso 2 $\lambda_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ Sea: $T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \cdot, e_k \rangle e_k$. $T^* = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \cdot, e_k \rangle e_k = T$. Pero: $\|T\| = \max_{\|x\|=1} \|Tx\| = \max_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k \langle x, e_k \rangle|^2} = \max_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x, e_k \rangle|^2} = \max_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2} = \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k| = \max_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k = \lambda_1$. Si suponemos que T es un operador compacto, la representación es la dada en el siguiente teorema:

39 Teorema 2.2.5.4: (Espectral para operadores compactos) Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(e_n) \geq 1 \subset H$; $(f_n) \geq 1 \subset H$ tal que para cada n se tiene: $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, f_k \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (2.2) Además, se tiene que $\lambda_n \rightarrow 0$ si (e_n) es infinito. Demostración: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto, entonces $T^* \in \mathcal{L}(H)$ es compacto y autoadjunto luego por el teorema 2.2.5.3, tenemos un sistema ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ de autovectores de T^*T con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$. Por otra parte, como $\langle T^*T x, x \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$ entonces $\lambda_n \geq 0$. Probemos la siguiente afirmación: Afirmación: $(\lambda_n) = (\lambda_n)$ Trivial (\supset) Sea $\lambda_n = 0 \Rightarrow T^*T e_n = 0 \Rightarrow \langle T^*T e_n, x \rangle = 0 \Rightarrow \langle T e_n, T x \rangle = 0 \Rightarrow \|T e_n\| = 0 \Rightarrow T e_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0$. Consideremos $\lambda_n = \sqrt{\lambda_n}$. Entonces $(\lambda_n) = (\lambda_n)$. $(\lambda_n) = (\lambda_n)$. $(\lambda_n) = (\lambda_n)$. $(\lambda_n) = (\lambda_n)$.

40 Como $\lambda_n = (\lambda_n) \oplus (\lambda_n)^\perp$, entonces por el teorema 2.2.5.3, tenemos que $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ es una base ortonormal. $\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2, \forall x \in H$. Luego $\lambda_n = (\lambda_n) \oplus (\lambda_n)^\perp \Rightarrow \lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$, Pero $\lambda_n = 0$, pues $\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$. Si escribimos $(\lambda_n) = \sqrt{\lambda_n}$ entonces $\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$. Observación 2.2.5.5 (λ_n) es llamado el n -ésimo número singular de T . La representación (2.2) es llamada la representación Hilbert - Schmidt de T . El siguiente corolario, muestra que todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito. Mas precisamente, se tiene el siguiente teorema: Corolario 2.2.5.6: $(\lambda_n) = (\lambda_n)$.

41 Demostración: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ entonces existe una sucesión de números reales no negativos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(e_n) \geq 1 \subset H$; $(f_n) \geq 1 \subset H$ tal que para cada n se tiene: $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, f_k \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (2.2). Si definimos $\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, f_k \rangle|$, entonces $\lambda_n \rightarrow 0$, por lo tanto $\lambda_n \in \mathbb{R}$. De forma similar al corolario anterior, puede demostrarse el siguiente corolario: Corolario 2.2.5.7: Sea el operador lineal definido en un espacio de Hilbert por $T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \cdot, e_k \rangle f_k$ donde $(e_n), (f_n)$ son sistemas ortonormales y $(\lambda_n) \geq 1$ una sucesión decreciente de números no negativos que converge a cero, entonces T es compacto y $T^* = T$. El siguiente corolario, calcula la adjunta de un operador compacto, vía la representación Hilbert-Schmidt. Corolario 2.2.5.8: Sea $T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \cdot, e_k \rangle f_k$ la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces $T^* = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \cdot, f_k \rangle e_k$.

42 Demostración: Por linealidad y continuidad, basta demostrar que $(\langle \cdot, y \rangle) * = (\langle \cdot, y \rangle) *$. Sea $x = \langle \cdot, y \rangle$. Entonces $x = \langle \cdot, y \rangle$. Luego $\langle x, z \rangle = \langle \langle \cdot, y \rangle, z \rangle = \langle y, z \rangle = \langle y, z \rangle$ por lo tanto, $x = \langle \cdot, y \rangle$. Es así que $x = \langle \cdot, y \rangle$. Observación 2.2.5.9 Como $\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 = 1$, Entonces por el corolario 2.2.5.8 tenemos que $(\lambda_n) = (\lambda_n)$ El siguiente teorema, demuestra otra representación de los números singulares. Teorema 2.2.5.10 $(\lambda_n) = \min_{\|x\|=1} \max_{\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle|$ Luego $\lambda_n = \max_{\|x\|=1} \min_{\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle|$ Como consecuencia directa del teorema anterior, tenemos el corolario siguiente:

43 Corolario 2.2.5.11: Sea T un operador compacto y un operador acotado Entonces: $(\lambda_n) \leq \|T\|$ $(\lambda_n) \leq \|T\|$ El siguiente corolario puede encontrarse en I. Gohberg, S. Goldberg and K. Krupnik (2000), pag. 52. y afirma que: Corolario 2.2.5.12: Si

y son operadores compactos, entonces: $\| () - () \| \leq \| - \|$; $\forall \in \mathbb{N}$ Observación 2.2.5.13 Por el corolario anterior, si \rightarrow entonces $() \rightarrow ()$, $= 1, 2, 3, \dots$ Ejemplo 2.2.5.14 Sea $()$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable .

Consideremos el siguiente operador: $= \sum 1^{+\infty} = 1 (,)$. Claramente el operador es un operador lineal y acotado. Para cada consideremos el operador $= \sum 1 = 1 (,)$. Se cumple que $\| - \| \rightarrow 0$. Como cada es de rango finito entonces es compacto. Por el corolario 2.2.5.6 concluimos que es compacto. Finalmente, por el corolario 2.2.5.7 tenemos que $() = 1$. Ejemplo 2.2.5.15 Sea $()$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable . Consideremos el siguiente operador:

$44 = \sum 1 2^{+\infty} = 1 (,)$. Claramente el operador es un operador lineal y acotado. Para cada consideremos el operador $= \sum 1 2 = 1 (,)$. Se cumple que $\| - \| \rightarrow 0$. Como cada es de rango finito entonces es compacto. Por el corolario 2.2.5.6 concluimos que es compacto. Finalmente, por el corolario 2.2.5.7 tenemos que $() = 1 2$. Ejemplo 2.2.5.16 Sea el operador compacto : $2 [0, 1] \rightarrow 2 [0, 1]$ definida por $() () = 2 \int () 0$. Puede demostrarse que $() = 4 (2 - 1)$. Varias desigualdades de los números singulares son dados en la siguiente proposición: Proposición 2.2.5.17 Para cada ≥ 1 se cumplen las siguientes desigualdades: 1. $\sum | () | = 1 \leq \sum () = 1$ 2. $\prod | () | = 1 \leq \prod () = 1$ 3. $\sum | () | = 1 \leq \sum [()] = 1$, ≥ 1 . 4. $\sum [(+)] \leq \sum (() + ()) = 1$, ≥ 1 .

45 5. $\sum (()) = 1 \leq \sum (()) (()) = 1$, ≥ 1 . 6. $\prod () \leq \prod () () = 1$ 7. $(\sum ((+)) = 1) 1 \leq (\sum (()) = 1) 1 + (\sum (()) = 1) 1$, ≥ 1 . 2.2.6

Trazas de Operadores Definición 2.2.6.1: Una traza sobre un ideal bilatero de operadores es un funcional lineal positivamente unitariamente invariante, esto es: $\rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y $(*) = ()$; $\forall \in \mathbb{C}, \forall \in \mathcal{A} ()$ unitario. En el contexto de espacios de Banach, la definición de traza puede reformularse de la siguiente forma: Teorema 2.2.6.2: Sea un ideal bilatero en un espacio de Banach $(, \| \cdot \|)$. Un funcional lineal sobre es una traza si y solo si $() = ()$; $\forall \in \mathbb{C}, \forall \in \mathcal{A} ()$ Demostración: $(\leftarrow) (* ()) = (* ()) = ((*)) = ()$ (\leftarrow) Es conocido que todo operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert puede expresarse como combinación lineal de cuatro operadores positivos, es decir, si $\in \mathcal{A} ()$ entonces $= \sum 4 = 1$; $\mathcal{A} ()$, $\in \mathbb{C}$, $= 1, 2, 3, 4$. Primero veamos que $() = ()$; $\forall \in \mathbb{C}, \forall \in \mathcal{A} ()$. En efecto, $() = (*) = ()$. Como $= \sum 4 = 1$, entonces

46 $() = (\sum 4 = 1) = \sum () 4 = 1 = \sum () 4 = 1 = ((\sum 4 = 1)) = ()$. 2.2.6.1 La traza de Operadores de Rango Finito Sea $(, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach. Consideremos un operador de rango finito $\in \mathcal{F} ()$. Luego podemos considerar $1, 2, \dots$ una base para $()$. Es conocido que puede representarse de la forma: $= \sum () = 1$, $() \subset *$. La traza de está definida $() = \sum () = 1$. Esta traza, definida sobre el ideal de operadores de rango finito, es un funcional lineal y verifica $() = ()$; $\forall \in \mathcal{F} (), \forall \in \mathcal{A} ()$. Por lo tanto, el funcional lineal es una traza sobre el ideal bilatero $\mathcal{F} ()$. Además, el funcional es espectral, es decir, si $\in \mathcal{F} ()$ entonces $() = \sum$, donde $()$ son los valores propios no nulos de . 2.2.6.2 La traza Usual A continuación, vamos a definir el ideal de operadores nucleares. En lo que sigue denotará un espacio de Hilbert separable infinito dimensional. Definición 2.2.6.2.1: Sea un espacio de Hilbert separable y $\in ()$. El operador es llamado nuclear o de clase traza si $\sum () > \infty = 1$.

47 El espacio de operador nucleares es denotado por $1 () = \{ \in \mathcal{A} () : \sum () > \infty = 1 \}$. Usando la proposición 2.2.5.17 no es difícil demostrar que $1 ()$ es un ideal bilatero del espacio $\mathcal{A} ()$ de operadores lineales y acotados. A continuación, definimos una norma en el espacio de operadores nucleares: Teorema 2.2.6.2.2: $\| \cdot \| 1 : 1 () \rightarrow \mathbb{R} 0 + \mapsto \| \| 1 = \sum () \infty = 1$ Demostración: 1) Como los $() \geq 0$, $\forall \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum () \infty = 1 \geq 0$ Además $\| \| 1 = \sum () \infty = 1 = 0 \Rightarrow 1 () = \| \| \mathcal{A} () = 0 \Leftrightarrow = 0$ 2) Sea $\in \mathbb{C}, \in 1 ()$, entonces $\| \| 1 = \sum () \infty = 1 = \sum \sqrt{ [() * ()] } \infty = 1 = \sum \sqrt{ 2 \cdot [*] } \infty = 1 \sum | \sqrt{ [*] } | \infty = 1 = | \cdot | \sum () \infty = 1 = | \cdot | \| \| 1$ 3) Usando las desigualdades de los números singulares tenemos que $\| + \| 1 = \sum (+) \infty = 1 \leq \sum () \infty = 1 + \sum () \infty = 1 = \| \| 1 + \| \| 1$. Teorema 2.2.6.2.3: $(1 (), \| \cdot \| 1)$ es un espacio de Banach.

48 Demostración: Sea $() \geq 1 \subset 1 ()$ una sucesión de Cauchy, entonces $\forall < 0, \exists 0 \in \mathbb{N}, \geq 0 \Rightarrow \| - \| 1 > 0$ Pero $\| - \| \mathcal{A} () = 1 (-) \leq \| - \| 1 > 0$. Luego $() \geq 1$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A} ()$ el cual es completo, entonces existe un operador $\in \mathcal{A} ()$ tal que $\| - \| \mathcal{A} () \rightarrow 0$ cuando $\rightarrow \infty$, además como cada es compacto, por el corolario 2.2.5.6, tenemos que es compacto. También $\sum (-) = 1 \leq \| - \| 1 > 0$, y haciendo $\rightarrow \infty$, se tiene: $\sum (-) = 1 \leq \forall < 0 \Rightarrow \| - \| 1 \leq \forall < 0$ Por lo tanto, \rightarrow , en la norma $\| \cdot \| 1$. A continuación, introducimos la traza usual de un operador nuclear: Definición 2.2.6.2.4: Sea $\in \mathcal{A} ()$ un operador compacto y sea $()$ una base ortonormal de . La traza usual de está definida por: $() = \sum (;) \infty = 1$ El siguiente teorema muestra que la suma de arriba está bien definida: Teorema 2.2.6.2.5: Si $\in 1 ()$, entonces la serie $\sum (e , e) \infty = 1$

49 converge absolutamente para cualquier base ortonormal $()$ de y su suma es independiente de la elección de la base. Demostración: Sea $= \sum () \infty = 1 (;)$ la representación Hilbert-Schmidt de . Primeramente, veamos que la serie del enunciado converge absolutamente: $\sum (e , e) \infty = 1 \sum | \sum () (,) , \infty = 1 | \infty = 1 \leq \sum () \sum | (,) (,) | \infty = 1 \infty = 1 \leq \sum () (\sum | (,) | 2 \infty = 1) 1 2 (\sum | (,) | 2 \infty = 1) 1 2 \infty = 1 \leq \sum () \| \| = \sum () > \infty = 1 \infty = 1$. Veamos ahora que la suma no depende de la base ortonormal elegida: $\sum (e , e) \infty = 1 \sum () \sum (,) \infty = 1 \infty = 1$, Como $\sum (,) \infty = 1 = \langle \sum (,) , \sum (,) \infty = 1 \infty = 1 \rangle = \langle , \rangle$, tenemos que $\sum (e , e) \infty = 1 \sum () (,) \infty = 1$. Por lo tanto, la suma no depende de la base ortonormal elegida.

50 Ejemplo 2.2.6.2.6 Sea $()$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable . Consideremos el siguiente operador compacto $= \sum 1^{+\infty} = 1 (,)$. Como $() = 1$ y $\sum 1^{+\infty} = 1 = \infty$, Entonces $\notin 1 ()$. Ejemplo 2.2.6.2.7 Sea $()$ una base ortonormal de

un espacio de Hilbert separable. Consideremos el siguiente operador compacto $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \langle \cdot, e_n \rangle e_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$, entonces $T \in \mathcal{K}(H)$. Ejemplo 2.2.6.2.8 Sea el operador compacto $T : L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$ definida por

$(Tf)(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$. Puede demostrarse que $\|T\| = 4$. Luego, como $\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 2^{-n} = 4 < \infty$, entonces $T \in \mathcal{K}(H)$. Por otro lado, usando la definición 2.2.6.2.4, es sencillo demostrar las siguientes propiedades de la traza usual: 1. $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ para $A, B \in \mathcal{K}(H)$. Esto se sigue directamente de la definición. 2. $\text{tr}(A^*) = \overline{\text{tr}(A)}$ para $A \in \mathcal{K}(H)$. En efecto, esto se sigue de las siguientes igualdades $\text{tr}(A^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A^* e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A e_n \rangle = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle} = \overline{\text{tr}(A)}$. 3. Como los operadores unitarios llevan bases ortonormales en bases ortonormales, entonces es claro que el funcional traza usual es unitariamente invariante. Los tres numerales anteriores demuestran el siguiente corolario: Corolario 2.2.6.2.9: El funcional es una traza sobre el ideal $\mathcal{K}(H)$ de operadores nucleares. Para establecer más ejemplos de operadores nucleares, el teorema de Mercer es un ingrediente importante.

52 El teorema de Mercer se ubica en el contexto de operadores integrales positivos, su prueba puede ser I. Gohberg S. Goldberg and M. Kaashoek (2003), pag. 197 y afirma que: Teorema 2.2.6.2.10 (Mercer) Sea una función continua en $[0,1] \times [0,1]$. Supongamos que para todo $x \in [0,1]$ se cumple que $\langle Kx, x \rangle \geq 0$, donde K es el operador compacto definido por $(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy$; entonces $\text{tr}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K e_n, e_n \rangle = \int_0^1 k(x,x) dx$ (2.3) donde $\{e_n\}$ es la sucesión de autovectores de K dadas por (1). Además, la serie de arriba converge absoluta y uniformemente en $[0,1] \times [0,1]$. El teorema de Mercer nos lleva al siguiente corolario. Corolario 2.2.6.2.11: Sea una función continua en $[0,1] \times [0,1]$. Supongamos que para todo $x \in [0,1]$ se cumple que $\langle Kx, x \rangle \geq 0$, donde K es el operador compacto definido por $(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy$; entonces K es nuclear y

53 $\text{tr}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K e_n, e_n \rangle = \int_0^1 k(x,x) dx$ Demostración: Tomando $\{e_n\}$ en (2) tenemos que $\langle K e_n, e_n \rangle = \int_0^1 |k(x,x)|^2 dx = \int_0^1 k(x,x) dx$, e integrando esta última expresión llegamos a $\text{tr}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K e_n, e_n \rangle = \int_0^1 k(x,x) dx$. Como para todo $x \in [0,1]$ se cumple que $\langle Kx, x \rangle \geq 0$, entonces K es un operador positivo, luego $\text{tr}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K e_n, e_n \rangle$ lo que nos dice que es nuclear. El teorema de Lidskii expresa la traza usual de un operador nuclear como la suma de sus autovalores tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas; por esta razón, algunos autores se refieren a la traza usual como una traza espectral, su prueba puede encontrarse en diferentes referencias como son I. Gohberg S. Goldberg and M. Kaashoek (2003), J.R. Retherford (1993). El enunciado es el siguiente: Teorema 2.2.6.2.12 (Lidskii) Si $T \in \mathcal{K}(H)$, entonces $\text{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)$,

54 donde $\{\lambda_n(T)\}$ es la sucesión de valores propios de T ordenados de tal forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$. Observación 2.2.6.2.13 Por el teorema de Lidskii y el lema de Weyl, la traza usual es continua (acotada) con la norma $\|\cdot\|_1$, mas precisamente se cumple $|\text{tr}(T)| \leq \|T\|_1, \forall T \in \mathcal{K}(H)$. Ejemplo 2.2.6.2.14 Por el corolario 2.2.6.2.11, si una función continua en $[0,1] \times [0,1]$ y para todo $x \in [0,1]$ se cumple que $\langle Kx, x \rangle \geq 0$, donde K es el operador compacto definido por $(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy$; entonces es nuclear y $\text{tr}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K e_n, e_n \rangle = \int_0^1 k(x,x) dx$. La expresión anterior es llamada la fórmula de la traza y expresa la traza usual del operador en función de su núcleo, es decir, no depende de los autovalores de K . Ejemplo 2.2.6.2.15 Sea una función continua en $[0,1] \times [0,1]$ con valores complejos. Sea $(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy$. La función satisface las hipótesis del teorema de Mercer. Por lo tanto,

55 $\text{tr}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K e_n, e_n \rangle = \int_0^1 k(x,x) dx$. Por el teorema de Lidskii, tenemos que $\text{tr}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(K)|$. 2.2.6.3 Trazas de Dixmier Definición 2.2.6.3.1: Una traza sobre un ideal bilatero de operadores es llamada singular si $\text{tr}(T) = 0, \forall T \in \mathcal{K}(H)$. La traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular y no es una extensión de la traza de operadores de rango finito, a diferencia de la traza usual. Para su construcción es necesario garantizar la existencia de límites generalizados o estados singulares con ciertas propiedades de invariancia y dilatación. A continuación, presentamos la construcción de la traza de Dixmier asociado a un estado. Durante toda esta sección, ℓ^∞ denotará el espacio de sucesiones complejas acotadas y \mathcal{K} el subespacio de sucesiones convergentes a cero. Por Carey y Sukochev (2006) existe un estado en ℓ^∞ (un funcional lineal positivo en ℓ^∞ tal que $(1,1,1,1,\dots) = 1$) con la siguiente propiedad: para cada $\epsilon > 0$ se tiene $\phi(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, donde $\phi : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}, (1, 2, 3, \dots) = (2, 3, \dots) : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty, (1, 2, 3, \dots) = (1, 1+2, 1+2+3, \dots) : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty, (1, 2, 3, \dots) = (1, 1, \dots, 1, \dots) : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty, (1, 2, 3, \dots) = (1, 1, \dots, 1, \dots) : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$

56 Observación 2.2.6.3.2: Si un estado en ℓ^∞ es invariante por σ , entonces $\phi(T) = 0$ para todo $T \in \mathcal{K}(H)$, donde $\mathcal{K}(H)$ denota el espacio de sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos. Además, como es denso en $\mathcal{K}(H)$, por continuidad tenemos que $\phi(T) = 0$ para todo $T \in \mathcal{K}(H)$. De esta forma, hemos conseguido estados que se anulan en $\mathcal{K}(H)$. Estados con esta propiedad, son llamados estados singulares. Por la observación anterior, hemos conseguido estados singulares invariantes por el operador σ , veamos la construcción de la traza de Dixmier. Consideremos el siguiente espacio: $1, \infty(\mathcal{A}) = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty \}$ Usando la proposición 2.2.5.17 se prueba que $1, \infty(\mathcal{A})$ es un ideal bilátero del algebra \mathcal{A} . Sea un estado singular en ℓ^∞ invariante por el operador σ (su existencia esta garantizada en la observación 2.2.6.3.2), sobre $1, \infty(\mathcal{A}) = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \}$ definimos el funcional por $\text{tr}_\phi(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \log(+1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n)$. Como $\text{tr}_\phi(A^*) = \overline{\text{tr}_\phi(A)}$ para todo $A \in 1, \infty(\mathcal{A})$ unitario, entonces es unitariamente invariante, solo faltaría probar la linealidad. Veamos esto: Sean $1, 2 + 1, \infty(\mathcal{A}), = 1 \log(+1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1, = 1 \log(+1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1, = 1 \log(+1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Por la proposición 2.2.5.17 se tiene que

57 $\leq +$, lo cual implica que $(1 + 2) \leq (1) + (2)$. Por A. Alberverio, D. Guido, A. Ponosov and S. Scarlatti (1996), para operadores positivos se cumple que $\sum (1) = 1 + \sum (2) \leq 1 \sum (1 + 2) = 1$. La desigualdad anterior implica que $+ \leq \log(2 + 1) \log(+1) 2$, y como $(\log(2 + 1) \log(+1) 2 - 2) = 0$, entonces $((2)) = ((\log(2 + 1) \log(+1) 2))$. Veamos ahora que $((2)) = (())$. En efecto, como es invariante por 2, la igualdad anterior es equivalente a que $(2, 2, 4, 4, \dots) = (())$. Como es un estado singular, basta verificar que $() - (2, 2, 4, 4, \dots) = 0$. Restando lo anterior tenemos $(1 - 2, 0, 3 - 4, 0, 5 - 6, 0, \dots)$, luego veamos que esta última sucesión converge a cero. Para esto, basta verificar que

58 $(2 - 1 - 2) = 0$. $2 - 1 - 2 = 1 \log(2) \sum (1 + 2) - 1 \log(2 + 1) \sum (1 + 2) = 1 2 - 1 = 1 = \log(1 + 1 2) \log(2 + 1) 2 - 1 - 2 (1 + 2) \log(2 + 1) \rightarrow 0$. Tomamos y concluimos que $(1) + (2) \leq (1 + 2)$, Concluimos entonces que es una traza sobre el ideal $1, \infty$. Definición 2.2.6.3.3. La traza de Dixmier de un operador autoadjunto $\in 1, \infty$ está definida por $() = (+) - (-)$ donde $+ = 1 2 (+ | |)$ y $- = - 1 2 (- | |)$ son operadores positivos llamados la parte positiva y negativa de respectivamente, donde $| |$ denota la raíz cuadrada de operador $*$. La traza de Dixmier de un operador arbitrario $\in 1, \infty$ está definida por $() = (()) + (())$ donde $() = 1 2 (+ *)$ y $() = - 2 (- *)$ son operadores autoadjuntos llamados la parte real e imaginaria de respectivamente. El siguiente teorema demuestra que la traza de Dixmier, en efecto, es una traza singular continua sobre el ideal $1, \infty$. Teorema 2.2.6.3.4 1) es una traza sobre el ideal $1, \infty$. 2) $() = 0, \forall 1 ()$. 3) es una funcional lineal continuo con la norma $\| \cdot \|_{1, \infty}$, más precisamente, $| () | \leq \| \cdot \|_{1, \infty} \forall 1, \infty ()$.

59 Demostración: 1) Todo $\in 1, \infty$ puede escribirse como $= 1 - 2 + 3 - 4$, donde $1 = (\text{Re}(T)) +$, $2 = (\text{Re}(T)) -$, $3 = (\text{Im}(T)) +$, $4 = (\text{Im}(T)) -$ son operadores positivos en $1, \infty$. como es aditivo en $1, \infty$, entonces se extiende por linealidad a un funcional lineal en todo $1, \infty$. Que el funcional lineal sea unitariamente invariante se sigue del hecho que $(*) = ()$ para todo \mathbb{N} y \mathcal{A} operador unitario. 2) Como $= 1 - 2 + 3 - 4$, donde $1 = (\text{Re}(T)) +$, $2 = (\text{Re}(T)) -$, $3 = (\text{Im}(T)) +$, $4 = (\text{Im}(T)) -$ son operadores positivos en $1, \infty$. Basta verificar que si $1 ()$ es un operador positivo entonces $() = 0$. En efecto, como $1 ()$ entonces $\sum () \infty = 1 > \infty$, luego $1 \log(+1) \sum () \leq 1 1 \log(+1) \sum () \infty = 1$. Tomando limite a la anterior desigualdad, concluimos que $1 \log(+1) \sum () \rightarrow = 1 0$, y como es un estado singular, entonces $() = 0$. 3) Puede verificarse que el estado es acotado y $\| \cdot \| = 1$, por lo tanto $| () | \leq \| \cdot \|_{1, \infty}, \forall \in 1, \infty$. El cual permite establecer la desigualdad pedida para todo en $1, \infty$. Definición 2.2.6.3.5. Un operador $\in 1, \infty$ es llamado Dixmier medible si el numero $()$ no depende del estado elegido.

60 Observación 2.2.6.3.6 Por el teorema anterior, tenemos que, en particular, se anula en el ideal de operadores de rango finito. Por lo tanto, la traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular. Alain Connes sugiere otra forma de construir estados invariantes por el operador dilatación 2. Veamos esto: Sea el operador $: \ell^{\infty} \rightarrow \ell^{\infty}, (()) = (\sum_{i=1}^{\infty} \sum 1 = 1)$. Consideremos un estado singular, por A. Pietsch (2013) tenemos que $2 - \in 0, \forall \in \ell^{\infty}$, luego, por continuidad de tenemos que $2 =$. Tomando $=$ se tiene $2 =$, luego es invariante por el operador dilatación 2. La traza de Dixmier asociada a este estado es llamada traza de Connes- Dixmier. Por lo tanto, toda traza de Connes-Dixmier es traza de Dixmier, pero el reciproco no siempre es cierto. Por lo tanto, si denotamos por el conjunto de trazas de Dixmier y por el conjunto de trazas de Connes- Dixmier, entonces \subset . Ejemplo 2.2.6.3.7 Sea $()$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable. Consideremos el siguiente operador compacto $= \sum 1 + \infty = 1 (,)$. Luego

61 $() = 1$. Claramente $\in 1, \infty$ y $() = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \log(+1) \sum 1 = 1, \forall$ estado singular invariante por 2. Por lo tanto, es Dixmier medible. Observación 2.2.6.3.8 Puede encontrarse en S. Lord, F. Sukochev and D. Zanin (2012) que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores y multiplicidades algebraicas del operador considerado. Mas precisamente, tenemos que: Si $\in 1, \infty$ entonces $() = (1 \log(+1) \sum () = 1)$. Ejemplo 2.2.6.3.9 Sea el operador compacto $: 2 [0, 1] \rightarrow 2 [0, 1]$ definida por $() () = 2 \int () 0$. Puede demostrarse que $() = 4 (2 - 1)$. Luego, como $\sum 4 (2 - 1) + \infty = 1 = \infty$, entonces $\in 1, \infty (2 [0, 1])$. Ahora supongamos que tiene un autovalor con autovector no nulo, entonces

62 $=$, lo que implica $2 \int () 0 = ()$. Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que $2 () = ' ()$, $(0) = 0$, lo que implica que $= 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador no tiene autovalores. Usando la observación 2.2.6.3.8 tenemos que $() = (1 \log(+1) \sum () = 1) = 0, \forall$ estado singular invariante por 2. Por lo tanto, es Dixmier medible. 2.2.6.4 Aplicaciones de trazas Como primera aplicación de la teoría de trazas, en particular la traza de Dixmier, tenemos el comportamiento asintótico de los autovalores de un operador. Veamos esto: Por Lord, Sukochev y Zanin (2021), tenemos el siguiente teorema: Teorema 2.2.6.4.1 Un operador positivo $\in 1, \infty$ es Dixmier medible si y solo si el limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \log(+1) \sum () = 1$, existe. Observación 2.2.6.4.2 Como consecuencia directa del teorema 2.2.6.4.2, podemos afirmar que si $\in 1, \infty$ es un operador positivo Dixmier medible y $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \log(+1) \sum () = 1$,

63 entonces las sucesiones $((+ 1))$ y $(\sum () = 1)$ son asintóticamente equivalentes. Por otra parte, si $\in 1, \infty$ es un operador positivo Dixmier medible y $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \log(+1) \sum () = 1 = 0$, Entonces la sucesión $(\log(+1))$ crece más rápidamente que la sucesión $(\sum () = 1)$. Como segunda aplicación de la teoría de trazas podemos comentar lo siguiente: Basados en el trabajo de Marchenko, H. Aden y Carl, B. (1996) inventaron el método del operador o método de traza para encontrar soluciones para la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv): $= + 3 2$ La principal idea de este método consiste en: Dada

una ecuación diferencial parcial no lineal y una solución escalar específica, el primer paso para encontrar otras soluciones es trasladar la ecuación no lineal dada, a una ecuación de operadores con su respectiva solución. Habiendo obtenido esta solución, el segundo paso es transferirla a una solución escalar usando un funcional adecuado (una traza). Este método fue usado por diferentes autores a otras ecuaciones diferenciales no lineales como la Kdv modificada, Sine-Gordon y la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP). CONCEPTUAL La construcción de la traza usual puede realizarse a partir del método de subalgebras sumergidas con la propiedad de aproximación (Gohberg, Goldberg & Krupnik, 2000). La traza de operadores de rango finito permitirá,

64 usando un teorema de extensión, construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares. Otras trazas podrán construirse usando límites generalizados invariantes por dilatación, como son, la traza de Dixmier y Connes-Dixmier (Connes, 1990). Aplicaciones de trazas pueden ser realizadas al cálculo de solución de ciertas ecuaciones diferenciales, usando sus propiedades de linealidad y su nulidad en los conmutadores. 2.3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS Espacios de Hilbert (Gohberg, Goldberg & Kaashoek, 2003) Consideremos un espacio un espacio vectorial $(; +; ; \cdot)$ Donde K es \mathbb{R} o \mathbb{C} . Un producto interno es una aplicación: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \rightarrow$ tal que se cumple: • Definición positiva $\langle ; \rangle \geq 0$ $\star \in \wedge \langle ; \rangle = 0 \iff = 0$ • Lineal en la primera variable: $\langle + ; \rangle = \langle ; \rangle + \langle ; \rangle$ $\star , , \in \wedge$, • Es hermítica $\langle ; \rangle = \langle ; \rangle$ \star , \in El par $(, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un producto interno en es llamado espacio prehilbert y si la norma $\| \cdot \| = \sqrt{\langle ; \rangle}$ es completa, entonces el par $(, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamado un espacio de Hilbert. Operadores lineales y acotados en Espacios de Hilbert (Gohberg, Goldberg & Kaashoek, 2003) Sea $(; \| \cdot \|)$ $(; \| \cdot \|)$ dos espacios normados y una aplicación $: \rightarrow$ que satisface: • $(+) = () + ()$ $\star ; \in$

65 • $() = ()$ $\star \in \wedge \in = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} “ ” así definido se llama operador lineal. Sea $(; \| \cdot \|)$ $(; \| \cdot \|)$ dos espacios normados y $: \rightarrow$ un operador lineal tal que $\| \cdot \| \leq \| \cdot \|$ $\star \in , < 0$, “ ” es llamado operador lineal acotado. Además, Si $=$ el espacio $()$ representará el espacio de operadores lineales y acotados en . Operadores Compactos (Retherford, 1993) Sea un espacio de Hilbert y $\in ()$, es llamado compacto si para toda sucesión acotada $()$ en $()$ tiene una subsucesión convergente en . El espacio de operadores compactos en es denotado por $()$ y define un ideal del algebra de operadores lineales y acotados $()$. Sucesión de números singulares (Retherford, 1993) La sucesión de números singulares de un operador compacto definido sobre un espacio de Hilbert , es una sucesión de decreciente de números no negativos $()$, donde $() = (\star)^{1/2}$. Ideal de Operadores (Lord, Sukochev & Zanin, 2012) Sea $L(H)$ denota el espacio de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert H . Un ideal J de operadores de $L(H)$ es un subespacio vectorial tal que si $A \in L(H)$ y $T \in J$, entonces $AT, TA \in J$. Funcional Traza (Lord, Sukochev & Zanin, 2012) Una traza τ sobre un ideal de operadores J es un funcional lineal tal que $\tau(AT) = \tau(TA)$, $\star T \in J, \star A \in L(H)$.

66 Traza Singular (Lord, Sukochev & Zanin, 2012) Una traza τ sobre un ideal de operadores J es llamada singular si $\tau(F) = 0$, $\star F$ operador de rango finito, es decir, para todo operador cuya dimensión de su imagen es finita.

67 CAPÍTULO III. HIPÓTESIS Y VARIABLES 3.1. HIPÓTESIS Hipótesis general. El funcional traza definido sobre el espacio de operadores de rango finito y los límites generalizados permitirán construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares así como la traza de Dixmier y Connes-Dixmier. Hipótesis específica. La propiedad de singularidad de la traza de Dixmier permitirá demostrar que este funcional no es una extensión de la traza usual. Propiedades de un funcional traza permitirá aplicar la teoría de trazas al cálculo de la solución de ciertas ecuaciones diferenciales. 3.2. DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE VARIABLES Variable dependiente Traza de operador sobre espacio de Hilbert. Variable independiente Operador lineal sobre un espacio de Hilbert

68 3.3. OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES Variable Dimensiones Índices Método Técnica Dependiente Traza de operador sobre espacio de Hilbert - Traza Usual - Traza de Dixmier - Traza de Connes-Dixmier - Traza definida sobre el ideal de operadores nucleares - Traza definida sobre el ideal de operadores de Lorentz - Traza de Dixmier escogiendo otro estado. $\cdot () = \sum \langle , \rangle = 1$ $\cdot () = (1 \log(+1) \sum () = 1)$ $\cdot () = (1 \log(+1) \sum () = 1)$ Deductivo Analítica Independiente Operador lineal sobre un espacio de Hilbert Operador lineal acotado La norma del operador es finita $\| \cdot \| >$ • Deductivo Analítica

69 CAPÍTULO IV. DISEÑO METODOLÓGICO 4.1 TIPO Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto está enmarcado en el tipo de investigación básica. A esta investigación le corresponde el código UNESCO 120201 y el código del plan nacional CTI 04050102. El diseño de la investigación a desarrollar será no experimental y consiste en, inicialmente, estudiar los ideales de operadores de rango finito, clase traza o nucleares y el ideal de operadores de Lorentz. Luego, se pretender definir los funcionales traza usual y traza de Dixmier. El trabajo termina con una aplicación de la teoría de trazas en la solución de la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv). 4.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. 4.3. POBLACIÓN Y MUESTRA Dada la naturaleza de la investigación no corresponde determinar población y muestra porque no se realizará un

tratamiento estadístico de datos. 4.4 LUGAR DE ESTUDIO Y PERIODO DESARROLLADO El lugar de estudio del presente trabajo es en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao-Trabajo Remoto.

70 4.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN La técnica a usarse en este trabajo de investigación es la inductiva pues pasamos de un caso particular (caso matricial) a un caso general (caso de operadores). La representación de operadores de rango finito en espacios de Hilbert como combinación lineal de operadores de rango uno, nos llevara a definir la traza sobre el ideal de operadores de rango finito. Esto será de utilidad para construir la traza usual sobre el espacio de operadores nucleares. El teorema espectral para operadores compactos nos introducirá la sucesión de números singulares de un operador compacto. Esta sucesión aparece de tanto en la traza usual como en las trazas de Dixmier y Connes- Dixmier. La teoría de límites generalizados es usada para la construcción de algunas trazas singulares como la traza de Dixmier. Esta teoría se basa en la forma analítica del teorema de extensión de Hahn Banach. Para ejemplificar el cálculo de ciertas trazas de Dixmier, estudiamos la teoría de operadores Volterra (Gohberg & Krein, 1970). Los instrumentos que se usarán para la recolección de la información necesaria serán, lápiz, papel, artículos científicos, textos especializados y un laptop personal. 4.6. ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE DATOS Con el estudio de la traza para operadores de rango finito se determina la traza usual sobre el ideal de operadores de clase traza o nucleares en espacios de Hilbert. Luego, se estudia varias propiedades de la traza usual.

71 A continuación, usando el teorema de extensión de Hahn Banach, se construyen límites generalizados invariantes por dilatación. Esto determinara la traza de Dixmier y Connes Dixmier sobre el ideal de operadores de Lorentz. Finalmente, basados en los resultados de Aden y Carl mostraremos algunas aplicaciones de la teoría de trazas para hallar soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.

72 CAPÍTULO V. RESULTADOS 5.1 RESULTADOS DESCRIPTIVOS 1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 tenemos que los ideales (\mathcal{K}) y (\mathcal{K}_1) son subespacios vectoriales del espacio vectorial \mathcal{A} . 2) Por el teorema 2.2.4.8, el teorema de Bolzano-Weierstrass puede extenderse a todo espacio normado de dimensión finita. 3) Por el teorema 2.2.5.1, todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma. 4) El teorema para operadores compactos autoadjuntos afirma que; Sea $T \in \mathcal{A}$ un operador compacto autoadjunto, entonces existe un sistema ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ de autovectores de T con autovalores correspondientes: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tal que para cada n , se tiene: $\sum_{k=1}^n \langle T e_k, e_k \rangle = 1$. Si la sucesión (λ_k) es infinita, entonces: $\lambda_k \rightarrow 0 \rightarrow \infty$. 5) En general, si el operador es compacto se tiene el teorema espectral para operadores compactos el cual afirma que: Sea $T \in \mathcal{A}$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene: $\sum_{k=1}^n \langle T e_k, e_k \rangle = 1$. Además, se tiene que $\lambda_k \rightarrow 0$ si (e_k) es infinito. 6) Por el corolario 2.2.5.6, todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito.

73 7) Por el corolario 2.2.5.8, si $\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle = 1$ es la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces $\|T\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle = 1$. 8) Por el teorema 2.2.5.10, otra forma de expresar los números singulares de un operador compacto es la siguiente: $\lambda_k = \min_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ U \perp \text{span}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}}} \|T U\|$. Luego $\lambda_1 = \|T\|$. 9) El corolario 2.2.5.12 afirma que si T y S son operadores compactos, entonces: $|\lambda_k(T) - \lambda_k(S)| \leq \|T - S\|$; $\star \in \mathbb{N}$. Esto nos conduce a afirmar que si $A_n \rightarrow A$ entonces $\lambda_k(A_n) \rightarrow \lambda_k(A)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. 10) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_k) una base ortonormal de un espacio de ℓ^2 es compacto y $\lambda_k = 1/k$. 11) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_k) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable, entonces el siguiente operador: $T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \langle \cdot, e_k \rangle e_k$. es compacto y $\lambda_k = 1/k^2$.

74 12) Por el ejemplo 2.2.5.16, el operador compacto $T : 2[0,1] \rightarrow 2[0,1]$ definido por $(Tf)(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$. satisface $\lambda_1 = 4(2-1)$. 13) Por el teorema 2.2.6.2.2, la aplicación $\|\cdot\|_1 : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\|T\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ define una norma en \mathcal{K} . 14) Por el teorema 2.2.6.2.3, el par $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach 15) Por el teorema 2.2.6.2.5, si (e_k) es una base ortonormal, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle$ converge absolutamente para cualquier base ortonormal (e_k) de \mathcal{H} y su suma es independiente de la elección de la base. 16) El corolario 2.2.6.2.9, nos permite afirmar que el funcional es una traza sobre el ideal \mathcal{K} de operadores nucleares. 17) Con el ejemplo 2.2.6.2.15 y el teorema de Mercer, si una función continua en $[a, b]$ con valores complejos. Sea $f(x) = \int_a^b f(t) dt$. La función satisface las hipótesis del teorema de Mercer. Por lo tanto,

75 $\lambda_k = \int_a^b |f(x)|^2 dx$. Por el teorema de Lidskii, tenemos que $\lambda_k = \int_a^b |f(x)|^2 dx$. 18) El teorema 2.2.6.3.4 nos dice que es una traza singular acotada sobre el ideal \mathcal{K} . 19) El ejemplo 2.2.6.3.7 establece que si (e_k) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable. Entonces el siguiente operador compacto $T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \langle \cdot, e_k \rangle e_k$. cumple $\lambda_1 = 1$. y claramente $\in \mathcal{K}$ y $\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) = 1$, \star estado singular invariante por T . Por lo tanto, es Dixmier medible. 20) El ejemplo 2.2.6.3.9 establece que el operador compacto $T : 2[0,1] \rightarrow 2[0,1]$ definido por $(Tf)(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$. satisface $\lambda_1 = 4(2-1)$. Luego, como

76 $\sum_{k=1}^{\infty} 4(2 - 1)^k = 1 = \infty$, entonces $\in 1, \infty (2 [0,1])$. Por otra parte, si suponemos que tiene un autovalor con autovector no nulo, entonces $\neq 0$, lo que implica $2 \int_0^1 f(x) dx = 0$. Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que $2 f(x) = f'(x)$, $f(0) = 0$, lo que implica que $f(x) = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador no tiene autovalores. Usando el corolario 2.2.6.3.9 tenemos que $f(x) = (1 - \log(x+1)) \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-k} = 0$, \star estado singular invariante por 2. Por lo tanto, es Dixmier medible. 21) El teorema 2.2.6.4.1 establece la caracterización de un operador positivo Dixmier medible, más precisamente, afirma que: Un operador positivo $\in 1, \infty (X)$ es Dixmier medible si y solo si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k+1) \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-k} = 1$, existe.

77 5.2 RESULTADOS INFERENCIALES 1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 tenemos que los ideales (X) y (Y) son subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathcal{A}(X)$, mas aun, tienen estructura de ideales bilateros del algebra $\mathcal{A}(X)$. 2) Por el teorema 2.2.5.1, todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma. Sin embargo, existen operadores compactos no autoadjuntos que no tienen autovalores, estos operadores son llamados Volterra. 3) Por el corolario 2.2.5.8, si $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-k} = 1$ es la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces $T^* = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-k} = 1$. Por lo tanto, podemos inferir que $T = (T^*)$. 4) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_k) una base ortonormal de un espacio de $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = 1/6$, T es compacto y $\|T\| = 1$. De esto podemos inferir que no es nuclear. 5) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_k) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable, entonces el siguiente operador: $T = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$, T es compacto y $\|T\| = 1/2$. De esto podemos inferir que es nuclear. 6) Por la observación 2.2.6.2.13, se puede inferir que el funcional es acotada con la norma $\| \cdot \|_1$.

78 7) Usando la observación 2.2.6.3.8 tenemos que para todo $\in 1, \infty (X)$ se cumple $f(x) = (1 - \log(x+1)) \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-k} = 0$, \star estado singular invariante por 2. Por lo tanto, la traza de Dixmier de todo operador en $1, \infty (X)$ depende de sus autovalores y multiplicidades algebraicas. 5.3 OTRO TIPO DE RESULTADOS DE ACUERDO A LA NATURALEZA DEL PROBLEMA Y LA HIPÓTESIS Ninguno.

79 CAPÍTULO VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS 6.1 CONTRASTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON LOS RESULTADOS. Con respecto a lo hecho en esta investigación tenemos la definición de la traza usual y la traza de Dixmier asociada a un estado singular invariante por dilatación. La traza usual de un operador nuclear se define por $\text{tr}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-k} = 1$, Por el teorema 2.2.6.2.5 esta suma no depende de la base ortonormal elegida y por lo tanto este funcional esta bien definido. Hemos visto que este funcional es lineal e unitariamente invariante lo que nos lleva a inferir que es una traza sobre el ideal de operadores nucleares. Por otra parte, por la observación 2.2.6.2.13, la traza usual es acotada con la norma $\| \cdot \|_1$. Finalmente, por el teorema de Lidskii, la traza usual puede expresarse como la suma $\text{tr}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-k} = 1$, lo que nos dice que la traza usual es espectral. Respecto a la traza de Dixmier, hemos visto su construcción usando límites generalizadas invariantes por dilatación. Por el teorema 2.2.6.3.4, la traza de Dixmier es un funcional lineal unitariamente invariante, y por lo tanto es una traza sobre el ideal $1, \infty (X)$. El mismo teorema nos permite afirmar que la traza de Dixmier es singular y acotada con la norma $\| \cdot \|_{1, \infty}$. Finalmente, si consideramos la observación 2.2.6.3.8 se puede inferir que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores del operador considerado y sus multiplicidades algebraicas.

80 6.2 CONTRASTACIÓN DE LOS RESULTADOS CON OTROS ESTUDIOS SIMILARES. En A. Pietsch (2013) se estudia de manera exhaustiva las trazas de Dixmier y Connes-Dixmier. En este artículo se estudia el conjunto de trazas de Dixmier y el conjunto de trazas de Connes-Dixmier; se compara ambos conjuntos y se demuestra que existen trazas de Dixmier que no es de Connes-Dixmier. En A. Alberverio (1996) se construyen otras trazas singulares diferentes de la traza de Dixmier. Es en este artículo que se introducen los operadores excéntricos generalizados. 6.3 RESPONSABILIDAD ÉTICA NINGUNA

81 CONCLUSIONES 1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 podemos concluir que (X) y (Y) son subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathcal{A}(X)$. 2) Por el teorema 2.2.4.8, se puede concluir que el teorema de Bolzano- Weierstrass admite extensión a todo espacio normado de dimensión finita. 3) Por el teorema 2.2.5.1, concluimos que todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma. Sin embargo, existe operadores compactos no autoadjuntos sin autovalores. 4) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_k) una base ortonormal de un espacio de $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = 1/6$, T es compacto y $\|T\| = 1$. Esto nos conlleva a concluir que no es nuclear. 5) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_k) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable, entonces el siguiente operador: $T = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$, T es compacto y $\|T\| = 1/2$. Esto nos conlleva a concluir que es nuclear. 6) Por el ejemplo 2.2.5.16, el operador compacto: $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ definido por $(Tf)(x) = 2 \int_0^1 f(x) dx$. satisface $\text{tr}(T) = 4(2 - 1)$.

82 Esto nos lleva a concluir que no es nuclear. Por otra parte, si suponemos que tiene un autovalor con autovector no nulo, entonces $\neq 0$, lo que implica $2 \int_0^1 f(x) dx = 0$. Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que $2 f(x) = f'(x)$, $f(0) = 0$, lo que implica que $f(x) = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador no tiene autovalores. 7) Por la observación 2.2.6.3.8, se puede concluir que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores y

multiplicidades algebraicas del operador considerado. Mas precisamente, tenemos que: Si $T \in M_{1,\infty}(H)$ entonces $\log \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) = \log \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T^*)$.

83 RECOMENDACIONES El libro más completo que trata la teoría de trazas de operadores en espacios de Banach y Hilbert es I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik (2000), por lo cual es recomendable su lectura para el mejor entendimiento del trabajo. Por otra parte, la teoría de trazas singulares y sus aplicaciones ha sido estudiado de manera exhaustiva en los últimos veinte años, la referencia más completa de este tema es S. Lord , F. Sukochev and D. Zanin (2012), por lo cual se recomienda su lectura.

Hit and source - focused comparison, Side by Side

Submitted text	As student entered the text in the submitted document.
Matching text	As the text appears in the source.

Scotiabank[®]

02 abr., 09:21 a. m.

Transferencia a otra cuenta Scotiabank

Número de operación 784.465.550.8378

Cuenta de origen: Cuenta Sueldo
*** **8270

Monto enviado: S/ 14.00

Cuenta de destino: Universidad Nacional Del
Calla
Cta. Cte. Soles
000-6345980



982098539
sotelos_1989@hotmail.com
(investigador, ruta, o no_orcid) [{investigador.id_orcid}](#)
Scopus ID: [{investigador.id_perfil_scopus}](#)



SOTELO PEJERREY ALFREDO

MAGISTER EN MATEMATICA

Experiencia Laboral

2014 - Presente **Docente Nombrado**
Universidad Nacional del Callao
SOY DOCENTE EN LA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICAS

Experiencia Laboral como Docente

2014 - Presente **Docente** | Universidad
Universidad Nacional del Callao
Ordinario-Auxiliar

2014 - 2019 **Docente** | Universidad
Universidad Privada del Norte Sac
Ordinario-Principal

Experiencia como Asesor de Tesis

Junio 2019 **Licenciado / Título** | Universidad Nacional del Callao
Octubre 2018 **Licenciado / Título** | Universidad Nacional del Callao
Octubre 2016 **Licenciado / Título** | Universidad Nacional del Callao

Formación Académica (Fuente: SUNEDU)

- **Magister** | Magister en Matematica
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
- **Licenciado / Título** | Título Profesional de Licenciado en Matemática
Universidad Nacional del Callao
Perú
- **Bachiller** | Bachiller en Matematica
Universidad Nacional del Callao
Perú

Producción Científica En Scopus (H Index: 0)

Los investigadores son responsables por los datos que consignen en la ficha personal del Directorio Nacional de Investigadores e Innovadores, la cual podrá ser verificada en cualquier oportunidad por el CONCYTEC. De comprobarse fraude o falsedad de la información y/o los documentos adjuntados, el CONCYTEC podrá dar de baja el registro, sin perjuicio de iniciar las acciones correspondientes.

01/2021 Global attractors for a system of elasticity with small delays
Mathematical Methods in the Applied Sciences 2021; ()

Producción Científica En ORCID

{IstProduccionCientificaOrcid.fecha_produccion_mm_yyyy} {IstProduccionCientificaOrcid.titulo}
{IstProduccionCientificaOrcid.fuente_publicacion_orcid}

Producción Científica WOS

01/2021 Global attractors for a system of elasticity with small delays
2021;

Producción Científica En Alicia

01/2013 El teorema de Lévy-Steinitz y algunas de sus generalizaciones
PUCP 2013;

01/2013 Un estudio del Teorema de Lévy - Steinitz y el contraejemplo de Marcinkiewics
UNAC 2013;

01/2013 El teorema de Lévy-Steinitz y algunas de sus generalizaciones
PUCP 2013;

Otras Publicaciones

11/2020 Traza de operadores: una introducción
2020; ()

11/2019 THE RIEMANN HYPOTHESIS AS A PROBLEM OF FUNCTIONAL ANALYSIS
2019; ()

12/2018 Trazas singulares: una introducción
2018; ()

08/2018 THE RIEMANN HYPOTHESIS AS A PROBLEM OF FUNCTIONAL ANALYSIS
2018; ()

Idiomas

Ingles Lectura: Avanzado

Portugues

Escritura:	Avanzado
Conversación:	Avanzado
Lectura:	Avanzado
Escritura:	Intermedio
Conversación:	Intermedio

Proyectos

10/2016 - 09/2017	Proyectos de investigación Operadores Hilbertschmidt: Caracterización y Ejemplos Universidad Nacional del Callao
09/2015 - 08/2016	Proyectos de investigación Una Generalización del Teorema de Levy-Steinitz Universidad Nacional del Callao

Línea de Investigación

Línea Principal (*) :

Área : Ciencias Naturales

Sub Área : Matemática

Disciplina : Matemáticas puras

DECLARACIÓN JURADA

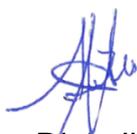
Yo, ...ALFREDO SOTELO PEJERREY..... Identificado
(a) con DNI N°45569296....., código docente N°5438.....
Docente en la Categoría AUXILIAR y Dedicación (DE) (TC) (TP), adscrito (a) a la
Facultad ...DE CIENCIAS NATUALES Y MATEMATICA
con domicilio en pasaje Q, N° 347, Urb. Carlos Cueto Fernandini. Distrito de Los
Olivos.

Declaro **BAJO JURAMENTO** que, al amparo del D.S. N° 044-2020-PCM, D.U. N° 026-2020 y Res. N° 068-2020-CU (UNAC) del 25 de marzo de 2020, **me comprometo** a presentar toda la documentación requerida en formato físico, subsanando también el pago por Carpeta de Investigación, una vez finalizado el período de aislamiento social por COVID-19 y de acuerdo a la posibilidad de reincorporación al trabajo presencial, para el trámite de:

- a. Nuevo proyecto de Investigación. ()
- b. Informe Final de Investigación. (X)
- c. Informe Trimestral de Investigación. ()

Asumiendo plena responsabilidad administrativa y/o legal que se derive de la presente Declaración Jurada.

Callao, 2 de abril de 2022.



Firma Digitalizada

Docente Investigador Responsable

FORMATO N° 11 – FEDU

FICHA DE EVALUACIÓN DE INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

(Para el Comité Directivo de la Unidad de Investigación)

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática como responsable de evaluar metodológicamente la redacción, la impresión, la presentación y el contenido del PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: "TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT" y por el profesor responsable **Dr. SOTELO PEJERREY, ALFREDO** y por el profesor colaborador (si lo hubiera)

===== luego de la verificación del informe final de investigación, observamos que:

1. DEL TÍTULO Y DE LA ESTRUCTURA O PARTES DEL INFORME:	SI	NO
I.1 El título del informe es igual al del proyecto de investigación aprobada por resolución.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I.2 Contiene las siguientes partes:	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I.3 Carátula, página de respeto índice (con numeración de páginas que se inicia con la página del índice)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Resumen y abstract	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Introducción	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Planteamiento del problema	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Marco teórico	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Hipótesis y variables	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Diseño metodológico	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Resultados	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Discusión de los resultados	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Conclusiones	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Recomendaciones	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Referencia bibliográficas	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Anexos	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
 2. DEL RESUMEN Y ABSTRACT	 SI	 NO
2.1 Está redactado en una página como máximo, e incluye palabras claves (Key words)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.2 Comprende el objetivo, el diseño metodológico, los resultados y la conclusión de la investigación.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3.	DE LA INTRODUCCIÓN	SI	NO
	3.1 Comprende la exposición del problema, con el (los) objetivo (s) la importancia y justificación de la investigación.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4.	DEL MARCO TEÓRICO	SI	NO
	4.1 Se exponen la (s) teoría (s) o leyes, doctrinas o trabajos de Investigación y la información imprescindible o relacionada con la Investigación realizada.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	4.2 Cita a los autores y fuentes bibliográficas consultadas de soporte a la investigación respetando los derechos del autor y de la propiedad intelectual.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5.	DISEÑO METODOLÓGICO	SI	NO
	5.1 Tipo de diseño de la investigación.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	5.2 Método de la investigación.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	5.3 La población y muestra; así como las técnicas o procedimiento de Recopilación de datos.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	5.4 Las técnicas estadísticas de análisis	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	5.5 Se indica la metodología o encuesta conocida y validada, o se describe el nuevo procedimiento o la nueva encuesta esta validada.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6.	DE LOS RESULTADOS	SI	NO
	6.1 Se presenta en forma detallada, tal como fueron obtenidos y en tablas, figuras, cuadros y textualmente.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	6.2 Dan solución al problema planteado y a los objetivos propuestos y en la justificación del proyecto de investigación.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	6.3 Evidencia la demostración de la (s) hipótesis.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7.	DE LA DISCUSIÓN.	SI	NO
	7.1 Compara y analiza los RESULTADOS de la investigación con los resultados obtenidos por otros investigadores, autores o teorías existentes y reportadas en el marco teórico.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	7.2 Permite inferir conclusiones respecto al problema, objetivos e hipótesis planteadas.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8.	DE LOS ANEXOS	SI	NO
	8.1 Los pertinentes al informe	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9.	DE LA REDACCIÓN, IMPRESIÓN Y PRESENTACIÓN DEL INFORME	SI	NO
	9.1 La redacción, impresión y presentación es de acuerdo al reglamento	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

vigente.

X

9.2 Presenta dos (02) ejemplares anillados o empastados

9.3 Presenta dos (02) CD con el contenido del informe_ final digitalizado Formato Word.

9.4 El CD esta rotulado con denominación de la investigación, autor (es), número de resolución y período de ejecución

SI CUMPLE con las exigencias y requisitos para su aprobación y expedir la resolución del Comité Directivo de la Unidad de investigación correspondiente.

NO CUMPLE con las exigencias de aprobación debiendo subsanar las observaciones de los numerales.....y es devuelto al docente responsable comunicándole por escrito las observaciones que deben ser subsanadas, indicándole cumplir con el plazo establecido en el "Reglamento de la participación de docentes en proyectos de investigación".

Callao, 12 de abril del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



Dr. WHUALKUER LOZANO BARTRA
Director